

Instruções Gerais

Exame teórico (30 pontos)

8 de julho de 2026

O incumprimento de qualquer uma das seguintes regras pode resultar em desqualificação. O exame teórico tem a duração de 5 horas e vale um total de 30 pontos. O início e o fim do exame, assim como o decorrer de cada hora, serão indicados por um aviso, indicando o tempo decorrido. Tal também será feito trinta, quinze e cinco minutos antes do fim do exame.

Antes da Prova

Não abra os envelopes até ser instruído para tal. Os seguintes materiais são fornecidos para utilização na mesa: (1) uma caneta, (2) uma calculadora científica, (3) uma régua.

Durante o exame

- Utilize a caneta fornecida para responder às questões.
- Utilize as folhas de resposta para as suas respostas finais. Preencha as secções adequadas com as suas respostas e observações necessárias. Deve escrever apenas na frente da folha. Qualquer escrita no verso da folha não será digitalizada e não será avaliada pelos examinadores.
- São fornecidas folhas de rascunho em branco com o cabeçalho **WORKSHEET** para cálculos. Utilize apenas as folhas designadas para esse efeito. Risque com um X as respostas e rascunhos desnecessários que não devam ser avaliados. **Utilize apenas a frente de cada folha e mantenha a margem da borda limpa. O verso das folhas não será digitalizado e o seu conteúdo não será considerado.**
- As respostas devem ser concisas e legíveis. Utilize equações, operadores lógicos, símbolos e esquemas para expressar as suas ideias com clareza. Evite utilizar textos explicativos, uma vez que os avaliadores podem não ser multilingues. **Não é obrigatório utilizar todas as variáveis fornecidas para expressar a sua resposta.**
- Não necessita de quantificar a incerteza das suas respostas, salvo indicação em contrário.
- Não abandone o seu lugar sem autorização. Se precisar de ajuda (ir à casa de banho, beber água, etc.), levante a placa com o sinal "Ajuda".

No final do exame

- Pare de escrever imediatamente quando for anunciado o fim do exame.
- Coloque todas as folhas no envelope fornecido. Organize-as com a face voltada para cima, pela seguinte ordem: Instruções Gerais, Folhas de Questões, Folhas de Resposta, Folhas de Rascunho. Ordene por número de página.
- Os supervisores indicar-lhe-ão quando pode sair. Não leve nada da sala consigo, incluindo a calculadora. Agradecemos a sua colaboração.

Instruções específicas

Ao longo do exame, utilize sempre os valores das constantes físicas indicados nas instruções gerais, salvo indicação em contrário. Ao realizar cálculos numéricos, indique sempre as unidades das grandezas utilizadas.

Constantes Físicas

Valores de referência para constantes físicas selecionadas.

Constante	Notação	Valor	Unidades
Velocidade da luz no vácuo	c	2.99792458×10^8	$m \cdot s^{-1}$
Constante de Planck	h	$4.135667696 \dots \times 10^{-15}$	$eV \cdot s$
Constante de Planck reduzida	$\hbar = h/2\pi$	$6.582119569 \dots \times 10^{-16}$	$eV \cdot s$
Número de Avogadro	N_A	$6.02214076 \times 10^{23}$	mol^{-1}
Constante de Boltzmann	k_B	$8.617333262 \times 10^{-5}$	$eV \cdot K^{-1}$
Constante dos gases ideais	R	8.31446261815324	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$
Carga elementar	e	$1.602176634 \times 10^{-19}$	$A \cdot s$
Constante gravitacional universal	G	$6.67430(15) \times 10^{-11}$	$m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5.670374419 \times 10^{-8}$	$kg \cdot s^{-3} \cdot K^{-4}$
Permeabilidade do vácuo	μ_0	$1.25663706127(20) \times 10^{-6}$	$kg \cdot m \cdot A^{-2} \cdot s^{-2}$
Permitividade do vácuo	ϵ_0	$8.8541878188(14) \times 10^{-12}$	$A^2 \cdot s^4 \cdot kg^{-1} \cdot m^{-3}$
Massa do elétron	m_e	$5.1099895069(16) \times 10^5$	eV/c^2
Massa do próton	m_p	$9.3827208943(29) \times 10^8$	eV/c^2
Unidade de massa atômica	amu	$9.3149410372(29) \times 10^8$	eV/c^2

QUESTÃO T1 [10 pts]. Três problemas

Esta questão consiste em três problemas independentes.

T1-A [3,0 pts]. Comporta hidrostática

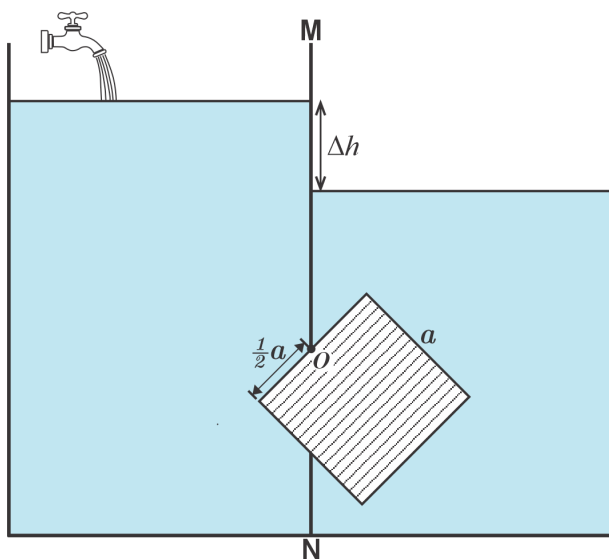


Fig. 1a.

Dois reservatórios de água são separados por uma parede vertical MN, como mostrado na Figura 1a. O reservatório da esquerda pode receber água de uma fonte. Pretende-se que a diferença máxima possível entre os níveis de água seja $\Delta h = 1,41$ m. Para tal, uma ranhura de dimensão vertical $a\sqrt{2}/2$ é cortada em MN e selada com um bloco cúbico sólido de comprimento de lado a . O bloco tem densidade $3\rho_0$, sendo ρ_0 a densidade da água. O bloco está completamente submerso, fixo à parede em O e pode rodar sem atrito em torno do eixo perpendicular ao plano da figura que passa pelo ponto O .

T1-A1 [3,0 pts.] Calcule o valor de a que garante que a diferença máxima admissível nos níveis de água não é excedida.

T1-B [3.5 pts]. Par elétron-positrão

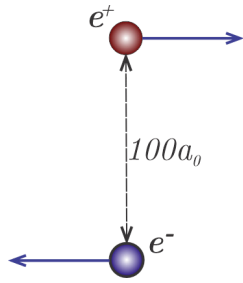


Fig. 1b.

Num determinado instante de tempo, um positrão e^+ encontra-se a uma distância de $100a_0$ de um elétron e^- . As partículas movem-se de tal forma que as suas velocidades, nesse instante, são antiparalelas e perpendiculares à sua posição relativa, conforme indicado na Figura 1b. Sabe-se que cada partícula possui um momento angular de módulo $\mu\hbar$ em relação ao centro de massa do sistema, onde μ é um fator numérico adimensional. Assume-se que a única interação entre e^+ e e^- é eletrostática (ambas as partículas têm a mesma massa m e carga de igual módulo, mas com sinal contrário). Assume-se ainda que este sistema permanece isolado e que a sua dinâmica é clássica e não relativista.

O raio de Bohr a_0 é dado por $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/(me^2)$.

T1-B1 [1.0 pts.] Se $\mu = 4$, o sistema está ligado, i.e. as partículas movem-se numa órbita fechada em torno do centro de massa do sistema. Encontre a distância de separação máxima entre e^+ e e^- em termos de a_0 .

T1-B2 [2,5 pts.] Se $\mu = \frac{15}{2}$, o sistema é não ligado, i.e. as partículas já não traçam uma órbita fechada em torno do centro de massa do sistema. Seja $\vec{u}_\infty$ a velocidade de e^+ relativamente a e^- quando a distância de separação entre elas tende para infinito. Calcule o ângulo entre $\vec{u}_\infty$ e a linha inicial de movimento de e^+ . Dê a sua resposta em graus.

Sugestão 1: A excentricidade ϵ de uma trajetória cônica para o presente caso é dada por

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{4L^2E}{k^2e^4m}}$$

onde E e L são a energia total e o módulo do momento angular total, respetivamente. k é a constante de Coulomb $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$.

Sugestão 2: A equação de uma cônica em coordenadas polares é

$$r = \frac{a}{1 - \varepsilon \cos(\theta)}$$

T1-C [3,5 pts]. Fotodissociação do ozono

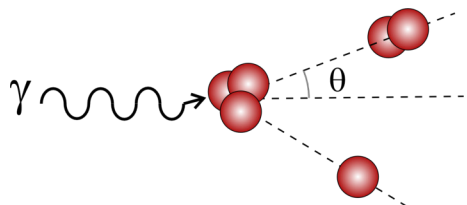


Fig. 1c.

Um fóton com frequência angular ω atinge uma molécula de ozono O_3 em repouso, dissociando-a (separando-a) numa molécula de oxigênio O_2 e num átomo de oxigênio O , como ilustrado na figura 1c. O fóton é absorvido neste processo. Sejam U_i e U_f as energias do estado fundamental das moléculas de ozono e de oxigênio, respectivamente. Assuma que este sistema permanece isolado e que a sua dinâmica é clássica (as energias potenciais não contribuem para a massa, e o movimento dos átomos e moléculas de oxigênio é não relativístico). Utilize a relação $p = E/c$ para o momento linear do fóton, onde E é a sua energia.

T1-C1 [2,5 pts]. Se o ângulo que o momento linear do O_2 resultante faz com o fóton incidente é θ , determine a frequência angular mínima $\omega_{\min}$ do fóton necessária para que esta dissociação ocorra com este ângulo. Escreva a sua resposta em função de $\hbar$, c , θ , $\Delta U = U_f - U_i$, e da massa m de um átomo de oxigênio.

T1-C2 [1.0 pts]. Se $\theta = \pi/6$, calcule o valor de $\hbar\omega_{\min} - \Delta U$. Dê a sua resposta em eletrões-volt (eV). Considere $\Delta U = 1.10 \text{ eV}$ e $m = 16.0 \text{ amu}$.

Sugestão:

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3 + \dots$$

QUESTÃO T2 [10 pts]. Cozinhar com luz solar?

A redistribuição do fluxo luminoso em regiões de alta e baixa intensidade devido à reflexão ou refração da luz pode levar à formação de *cáusticas*, curvas formadas pela interseção de raios de luz infinitesimalmente próximos. Como exemplo, a Figura 2a mostra a cáustica formada por raios incidentes paralelamente ao eixo de um espelho semicilíndrico. A Figura 2b mostra uma fotografia da cáustica formada pela reflexão da luz na parte inferior de uma chávena. O ponto mais brilhante e central da cáustica é denominado *cúspide*; neste ponto, a intensidade luminosa é máxima.

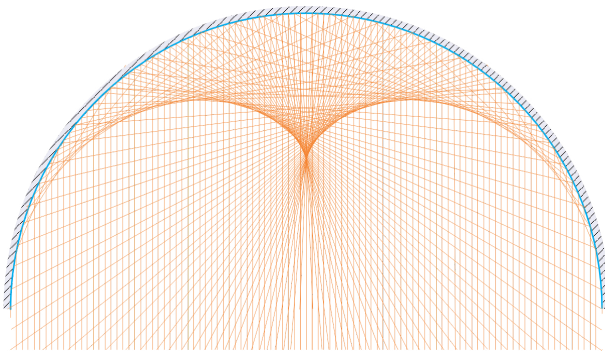


Fig. 2a.



Fig. 2b.

As cáusticas têm uma variedade de aplicações na ciência, desde a ótica de alta precisão e ótica quântica até à astrofísica. Nesta questão, irá estudar a formação de cáusticas por reflexão de luz num espelho semicilíndrico de raio R , como mostrado na Figura 2c. Irá também investigar outros aspetos deste espelho, como a sua aplicação em *fogões solares*.

Ao longo do problema, assuma que os raios incidentes provêm de uma fonte de luz externa distante, e são paralelos ao eixo ótico do espelho. Por simetria, é suficiente estudar a reflexão num único plano. A Figura 2d mostra esse plano, o espelho e o sistema de coordenadas utilizado ao longo de todo o problema.

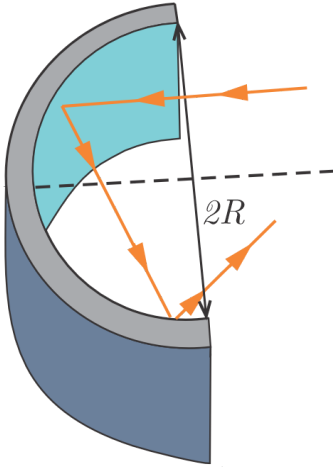


Fig. 2c.

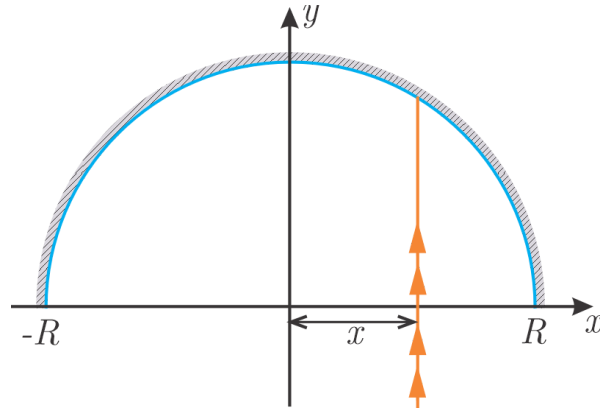


Fig. 2d.

T2-A [1.5 pts]. Reflexões múltiplas

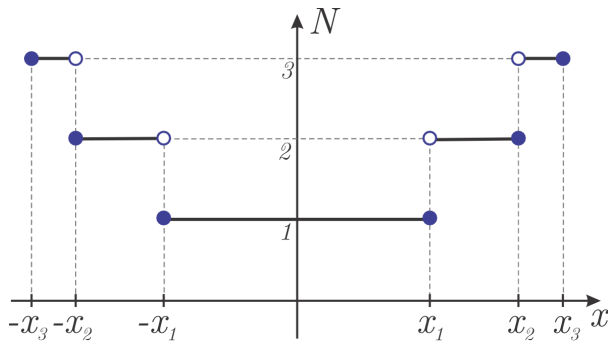


Fig. 2e.

A Figura 2e mostra a relação entre a coordenada x de um raio incidente e o número N de reflexões que sofre, até $N = 3$. À medida que x varia no intervalo $(-R, R)$, a variável N varia sobre todos os números naturais maiores ou iguais a 1. A distância máxima ao eixo óptico que permite que um raio incidente seja refletido pelo espelho no máximo N vezes é designada por x_N .

T2-A1 [1.5 pts]. Obtenha a expressão geral para x_N na sequência infinita $x_1, x_2, x_3, \dots$ que dá o limite nas coordenadas dos raios com, no máximo, N reflexões. Expresse a sua resposta em função de R e de N .

T2-B [4.0 pts]. Fogão Solar

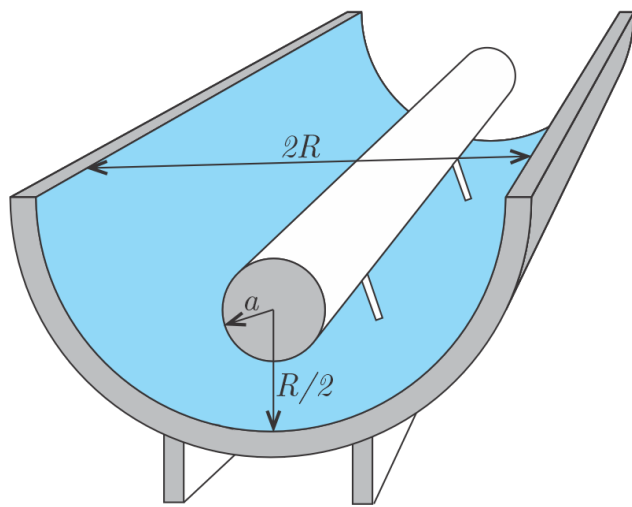


Fig.2f.

Considere um sistema constituído por um espelho semicilíndrico e um recipiente cilíndrico. O raio do espelho é R . O raio do recipiente é a . Os eixos do espelho e do recipiente são paralelos. O centro do recipiente está a $R/2$ do espelho no plano de simetria do sistema, conforme ilustrado na Figura 2f. O espelho utiliza a radiação solar para aquecer os alimentos no interior do recipiente. Assume-se que a luz solar tem intensidade (potência por unidade de área) constante e uniforme, e que os raios de luz são paralelos ao eixo óptico do espelho. Além disso, assume-se que a é tal que qualquer raio que atinja o recipiente é refletido pelo espelho no máximo uma vez. Seja $\theta_{\max}$ o ângulo máximo de incidência no espelho (medido em relação à normal traçada no ponto de incidência) de qualquer raio refletido que atinja o recipiente.

T2-B1 [2.0 pts]. É possível escrever o raio do recipiente como $a = \alpha \sin(\theta_{\max}) + \beta \sin(2\theta_{\max})$. Obtenha α e β em função de R .

Caso não tenha conseguido encontrar as expressões pedidas na alínea anterior, utilize α e β no resto do problema.

T2-B2 [1.5 pts]. Seja P_0 a potência que seria recebida pelo cilindro se o espelho não estivesse presente. Escreva a razão P/P_0 entre P_0 e a potência P efetivamente recebida, em função de $\theta_{\max}$.

T2-B3 [0.5 pts]. Se $R = 1.0$ m, escreva o valor de a tal que $P = 5P_0$. Dê a sua resposta em cm.

T2-C [4.5 pts]. Cáusticas e Cúspide

T2-C1 [0.5 pts]. Considere um raio A que incide no espelho com um ângulo θ , como mostrado na Figura 2g. Após a reflexão, a equação correspondente a este raio no sistema de coordenadas definido na Figura 2g. é $y = m_A x + b_A$. Escreva m_A e b_A em função de θ e R

Sugestão: a forma esperada é $m_A = K_1 \cot(K_2 \theta)$ e $b_A = R \frac{K_3}{\cos(K_4 \theta)}$, com K_i constantes numéricas.

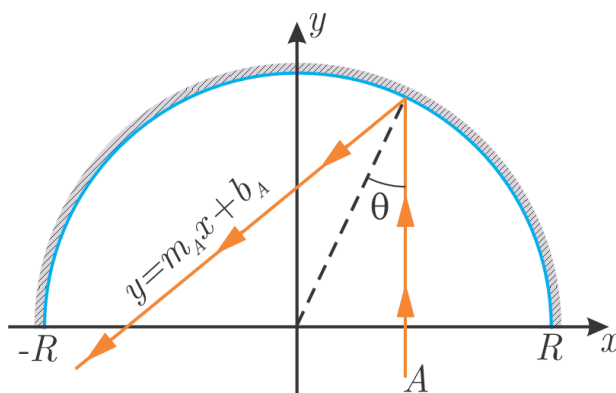


Fig. 2g.

T2-C2 [2.0 pts]. Considere agora um raio B , paralelo a A , que atinge a superfície do espelho fazendo um ângulo com a normal $\theta + \Delta\theta$, com $\Delta\theta \ll \theta$. Após a reflexão, a equação da reta correspondente a este raio é $y = m_B x + b_B$. Calcule m_B e b_B em função de θ , $\Delta\theta$ e R , mantendo termos em $\Delta\theta$ até à primeira ordem.

T2-C3 [1.0 pts]. Determine as coordenadas do ponto de interseção (X_c, Y_c) entre os raios refletidos de A e de B . Dê a sua resposta em função de R e de θ .

T2-C4 [1.0 pts]. Para $\theta \ll 1$, obtemos $Y_c = v|X_c|^{p/q} + u$. Determine v e u em função de R , e calcule o valor dos inteiros p e q (ou, equivalentemente, obtenha o valor do número racional p/q).

QUESTÃO T3 [10 pts]. À procura do zero absoluto

Um ciclo de refrigeração tem de ser realizado por um sistema com características adequadas às temperaturas a atingir. Há cem anos, em 1926, o químico William Giauque e, independentemente, o físico Peter Debye, propuseram os sais paramagnéticos como sistemas ideais para atingir temperaturas muito abaixo de 1 K. De facto, a partir da década seguinte, foram atingidas temperaturas tão baixas como 0,0044 K (Wander de Haas e Gerrit Wiersma, 1935, Laboratórios Criogénicos de Leiden). Nesta questão, estuda-se o ciclo de refrigeração de Carnot paramagnético.

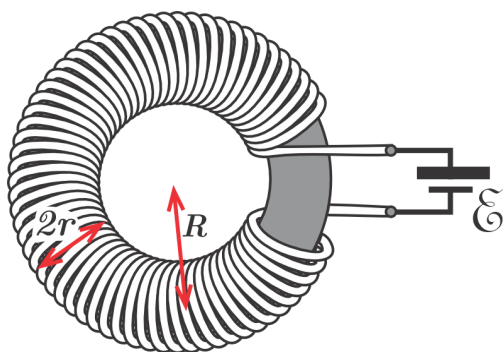


Fig. 3a.

Considere um toroide com raio médio R e raio interior r , constituído por um material paramagnético homogéneo e isotrópico. Em torno deste é enrolado um fio condutor isolado, com as suas extremidades ligadas a uma fonte de tensão externa (e.m.f.), como mostrado na Figura 3a. A resistência do fio é tão baixa que as perdas de energia devidas ao aquecimento do fio podem ser desprezadas. O enrolamento é denso, com N espiras no total, e assume-se que $r \ll R$, de modo que os campos $\vec{H}$ e $\vec{B}$ e a magnetização $\vec{M}$ têm magnitudes aproximadamente constantes ao longo de todo o toroide. Sejam V e A o volume do toroide e a área da sua secção transversal, respetivamente. Daqui em diante, a abreviatura Pm-T é utilizada para designar o toroide paramagnético.

Nos materiais paramagnéticos, $\vec{M}$ é paralelo a $\vec{H}$ e verifica-se a seguinte relação:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}.$$

Convenção de sinal para transferências de energia: neste problema, o Trabalho (W) e o Calor (Q) são considerados positivos quando entram no sistema, e negativos quando saem.

T3-A [1.0 pts]. Trabalho no Pm-T

Nota: em materiais magnéticos, $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_C$, onde I_C é a corrente livre que passa pela área delimitada pela curva fechada C .

T3-A1 [0.2 pts]. Seja H a magnitude de $\vec{H}$ no toroide. Calcule H em função de N , A , V e da corrente elétrica instantânea I no fio.

T3-A2 [0.6 pts]. Seja dW_{emf} o trabalho que a fonte de tensão externa realiza para alterar a magnitude de $\vec{B}$ em dB . Determine dW_{emf} em função de V , H , e dB .

T3-A3 [0.2 pts]. O trabalho total realizado pela fonte de tensão, dW_{emf} , pode ser dividido em duas partes: o trabalho que seria realizado para alterar o campo magnético se o toroide tivesse o núcleo em vácuo, dW_{vac} , e o trabalho realizado sobre o material paramagnético em si, dW . Obtenha dW em função de μ_0 , H , V e dM .

T3-B [3,0 pts]. Calor e temperatura no Pm-T

A tabela seguinte compara dois sistemas termodinâmicos: o gás ideal e o Pm-T. Use esta informação e a sua resposta à questão T3-A3 para resolver as questões seguintes. Esta informação será também utilizada na parte C. Se não encontrou uma resposta para dW na questão T3-A3, pode usar $dW = \alpha V \mu_0 H dM$, onde α é um número. O volume V do toroide paramagnético é constante, pelo que não existe trabalho devido à pressão. Na tabela, T designa sempre a temperatura.

GÁS IDEAL	TOROIDE PARAMAGNÉTICO
Variáveis de estado: P , V e temperatura T	Variáveis de estado: H , M e temperatura T
Constantes: R , γ e número de moles n	Constantes: K , λ e número de moles n
Equação de estado: $PV = nRT$	Equação de estado: $TMV = nKH$
Capacidade calorífica a V constante: $C_V = nR/(\gamma - 1)$	Capacidade calorífica a M constante: $C_M = n\lambda/T^2$
A energia interna U em qualquer processo satisfaz $dU = C_V dT$	A energia interna U em qualquer processo satisfaz $dU = C_M dT$

K e λ são constantes determinadas pelo material no toroide. Pode usar as equações fornecidas na tabela diretamente, sem as demonstrar.

T3-B1 [1,5 pts]. Se o módulo de $\vec{H}$ variar de H_i para H_f a uma temperatura constante T , é transferida uma energia Q entre o Pm-T e o seu ambiente. Determine Q em função de μ_0 , n , K , H_i , H_f e T .

T3-B2 [1,5 pts]. Se o módulo de $\vec{H}$ variar adiabaticamente de H_i para H_f , a temperatura do Pm-T varia de T_i para T_f . Determine $\Delta T = T_f - T_i$ em função de μ_0 , n , K , λ , H_i , H_f e T_i .

T3-C [6.0 pts]. Frigorífico de Carnot do Pm-T

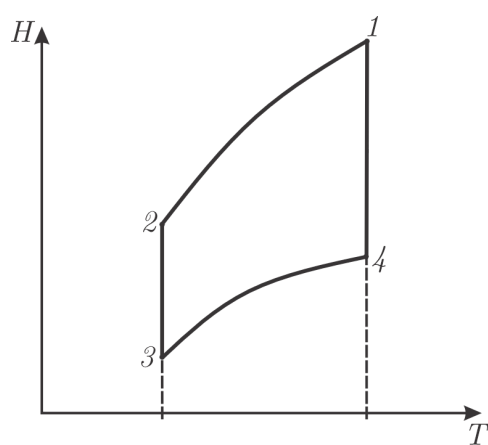


Fig.3b.

O diagrama de H em função de T do ciclo de refrigeração de Carnot $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ realizado pelo Pm-T é apresentado na figura 3b. Neste ciclo, sejam:

T_h : temperatura do reservatório quente

T_c : temperatura do reservatório frio

Q_h : valor absoluto do calor transferido para o reservatório quente

Q_c : valor absoluto do calor absorvido do reservatório frio

T3-C1 [0.2 pts]. Indique T_h e T_c no eixo T do diagrama H em função de T . Identifique também os processos nos quais ocorrem as transferências de Q_h e Q_c , respectivamente.

T3-C2 [1.5 pts]. Sejam M_1 , M_2 , M_3 , e M_4 as magnitudes de $\vec{M}$ nos vértices deste ciclo. Obtenha M_1 em função de M_2 , M_3 , e M_4 .

T3-C3 [0.8 pts]. Suponha que, para arrefecer 1,00 L de hélio líquido, inicialmente a 1,00 K, utilizamos 2,0 moles de Pm-T fabricado em *cromato de potássio*. Para este material, $K = 1,87 \times 10^{-6} \text{ K} \cdot \text{m}^3/\text{mol}$, a sua densidade é 2730 kg/m^3 e a sua massa molar é $0,19 \text{ kg/mol}$. O Pm-T realiza um ciclo de refrigeração de Carnot com $H_1 = 411624 \text{ A/m}$, $H_2 = 311306 \text{ A/m}$, $H_3 = 204618 \text{ A/m}$ e $H_4 = 240446 \text{ A/m}$. Calcule a temperatura final do hélio líquido após um ciclo de operação. Assuma que, para o hélio líquido, tanto a capacidade calorífica específica $c = 100 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$, como a densidade $\rho = 130 \text{ kg/m}^3$ permanecem constantes.

T3-C4 [2.0 pts]. Com o objetivo de baixar continuamente a temperatura de um corpo com capacidade calorífica constante C_c , são realizados ciclos de Carnot ao longo do tempo, de tal forma que a potência P transferida para o refrigerador permanece constante. Assume-se então que a temperatura T_h do reservatório quente permanece constante e que, em cada ciclo de funcionamento, a temperatura T_c do corpo arrefecido diminui de dT_c , que satisfaz a relação $dQ_c/dQ_h = T_c/T_h$. Se em $t = 0$ temos $T_c = T_0$, determine o tempo t que o refrigerador de Carnot deve operar para que o corpo arrefecido atinja uma temperatura $T < T_0$. Escreva a sua resposta em função de C_c , T_h , P , T_0 e T .

T3-C5 [1.5 pts]. A eficiência de um frigorífico é quantificada pelo seu *coeficiente de desempenho* $\text{COP} = Q_c/W$. Determine o COP total do frigorífico da questão T3-C4, com todos os ciclos realizados até ao instante t . Escreva a sua resposta em função de T_0 , T_h e T .