Caracterização dos Colóides do Solo (10 pontos)

A ciência dos colóides é útil para caraterizar as partículas do solo porque muitas delas podem ser consideradas partículas coloidais com dimensão da ordem do micrómetro . Por exemplo, o movimento browniano (movimento aleatório de partículas coloidais) pode ser utilizado para medir o tamanho dessas partículas.

Parte A. Movimentos de partículas coloidais (1,6 pontos)

Vamos analisar o movimento browniano unidimensional de uma partícula coloidal com massa M. A equação de movimento para a sua velocidade $v(t)$ é a seguinte:

$$M\dot{v} = -\gamma v(t) + F(t) + F_{\text{ext}}(t), \tag{1}$$

em que γ é o coeficiente de atrito, $F(t)$ é uma força devida a colisões aleatórias com moléculas de água e $F_{\text{ext}}(t)$ é uma força externa. Na Parte A, assumimos que $F_{\text{ext}}(t) = 0$.

A.1	Considere que uma molécula de água colide com a partícula em $t = t_0$, fornecendo-lhe um impulso I_0, e depois da colisão temos $F(t) = 0$. Se for $v(t) = 0$ antes da colisão, tem-se $v(t) = v_0 e^{-(t-t_0)/\tau}$ para $t > t_0$. Determine v_0 e τ, usando I_0 e os parâmetros necessários da Eq. (1)	0.8pt

A seguir, pode utilizar τ nas suas respostas.

A.2	Na realidade, várias moléculas de água colidem com a partícula sucessivamente Supondo que a colisão de ordem i fornece um impulso I_i no instante t_i, determine $v(t)$ na condição de $t > 0$ e $v(0) = 0$. Dê também a inequação que especifica o intervalo de valores de t_i que é necessário considerar para um dado t. Na folha de respostas, não é necessário especificar esta gama de valores na expressão de $v(t)$.	0.8pt

Parte B. Equação efectiva do movimento (1,8 pontos)

Os resultados obtidos até agora implicam que as velocidades das partículas $v(t)$ e $v(t')$ podem ser consideradas quantidades aleatórias não-correlacionadas se $|t - t'| \gg \tau$. Com base nisso, , introduzimos um modelo teórico para descrever aproximadamente o movimento Browniano unidimensional em que a velocidade varia aleatoriamente em cada intervalo de tempo δ $(\gg \tau)$, ou seja

$$v(t) = v_n \quad (t_{n-1} < t \leq t_n), \tag{2}$$

com $t_n = n\delta$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ e uma quantidade aleatória v_n. Satisfaz

$$\langle v_n \rangle = 0, \quad \langle v_n v_m \rangle = \begin{cases} C & (n = m), \\ 0 & (n \neq m), \end{cases} \tag{3}$$

com um parâmetro C que depende de δ. Aqui $\langle X \rangle$ indica o valor esperado de X. Ou seja, se obter infinitas vezes números aleatórios X , a sua média será $\langle X \rangle$.

Consideramos agora o deslocamento da partícula $\Delta x(t) = x(t) - x(0)$ para $t = N\delta$ sendo N um número inteiro .

B.1	Determinar $\langle \Delta x(t) \rangle$ e $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ usando C, δ, e t.	1.0pt

B.2	A quantidade $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ é designada por deslocamento quadrático médio (MSD). É um observável caraterístico do movimento Browniano, que corresponde ao caso limite $\delta \to 0$. A partir deste caso limite, podemos mostrar que $C \propto \delta^{\alpha}$ e $\langle \Delta x(t)^2 \rangle \propto t^{\beta}$. Determine os valores de α e β.	0.8pt

Parte C. Eletroforese (2,7 pontos)

Nesta secção abordamos a eletroforese, ou seja, o transporte de partículas carregadas por um campo elétrico. Uma suspensão de partículas coloidais com massa M e carga $Q\ (>0)$ é colocada num canal estreito com uma secção transversal A (Fig.1(a)). Ignoramos a interação entre as partículas, os efeitos da parede, o fluído e os iões que possam lá existir, e a gravidade.

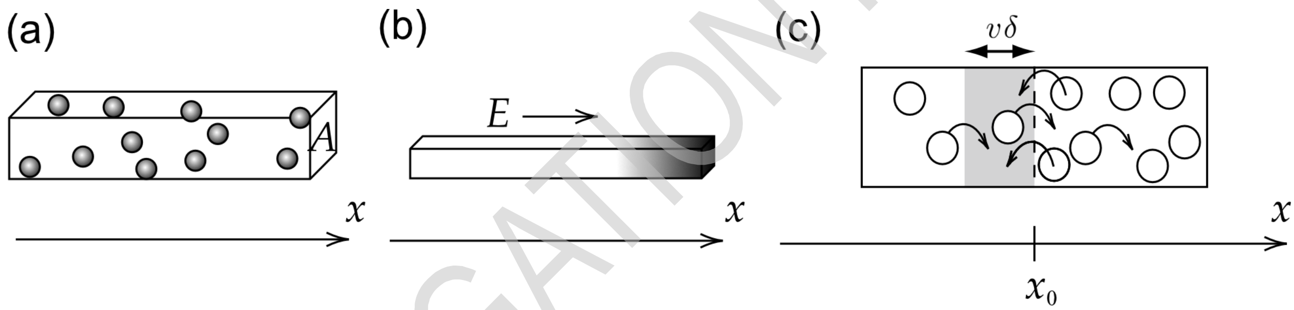


Fig.1: Configuração para a Parte C.

Ao aplicar um campo elétrico uniforme E na direção x, as partículas são transportadas e a sua concentração $n(x)$ (número de partículas por unidade de volume) torna-se não uniforme (Fig.1(b)). Quando E é removido, esta não uniformidade desaparece gradualmente. Este facto deve-se ao movimento browniano das partículas. Se $n(x)$ não for uniforme, o número de partículas que vão para a direita e para a esquerda pode diferir (Fig.1(c)). Isto gera um fluxo de partículas $J_D(x)$, o número médio de partículas que fluem no ponto x, ao longo do eixo x, por unidade de área de secção transversal e unidade de tempo. Sabe-se que este fluxo satisfaz

$$J_D(x) = -D\frac{dn}{dx}(x), \tag{4}$$

em que D é designado por coeficiente de difusão.

Suponhamos, para simplificar, que metade das partículas tem velocidade $+v$ e a outra metade tem velocidade $-v$. Seja $N_+(x_0)$ o número de partículas com velocidade $+v$ que atravessa x_0 da esquerda para a direita por unidade de área transversal e por unidade de tempo. Para partículas com velocidade $+v$atravessarem x_0 no intervalo de tempo δ, estas têm que estar na região sombreada da fig. 1(c). Como δ é pequeno, tem-se que $n(x) \simeq n(x_0) + (x - x_0)\frac{dn}{dx}(x_0)$ nesta região.

C.1	Expresse $N_+(x_0)$usando as quantidades que forem necessárias de entre $v,\ \delta,\ n(x_0)$, e $\frac{dn}{dx}(x_0)$.	0.5pt

Definimos $N_-(x_0)$ como a contraparte de $N_+(x_0)$ para a velocidade $-v$. Assim, temos $J_D(x_0) = \langle N_+(x_0) - N_-(x_0) \rangle$. De acordo com a Eq. (3) , temos $\langle v^2 \rangle = C$.

C.2	Determine $J_D(x)$ usando as quantidades necessárias de entre C, δ, $n(x_0)$ e $\frac{dn}{dx}(x_0)$. Utilizando essa expressão e a Eq.(4), expresse D em função de C e de δ, e $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ em função de D e de t.	0.7pt

Discutimos agora o efeito da pressão osmótica Π. Esta é dada por $\Pi = \frac{n}{N_A} RT = nkT$ com a N_A constante de Avogadro, R a constante dos gases, T a temperatura, e $k = \frac{R}{N_A}$ a constante de Boltzmann. Consideremos a concentração não uniforme que foi formada sob o efeito do campo elétrico E (Fig.1(b)). Como $n(x)$ depende de x, o mesmo acontece com $\Pi(x)$. Assim, as forças devidas a $\Pi(x)$ e a $\Pi(x + \Delta x)$ devem ser equilibradas com a força total do campo E que actua sobre as partículas (Fig.2). Neste caso consideramos Δx pequeno, de modo que $n(x)$ pode ser considerado constante neste intervalo, enquanto $n(x + \Delta x) - n(x) \simeq \Delta x \frac{dn}{dx}(x)$.

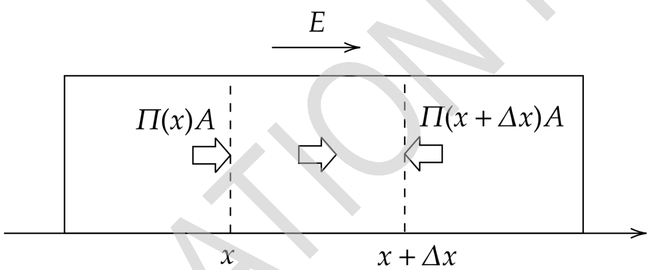


Fig.2: Balanço de forças.

C.3	Exprimir $\frac{dn}{dx}(x)$ usando $n(x)$, T, Q, E, e k.	0.5pt

Vamos agora discutir o equilíbrio do fluxo. Para além do fluxo $J_D(x)$ devido ao movimento browniano, existe também um fluxo devido ao campo elétrico, $J_Q(x)$. Este fluxo é dado por

$$J_Q(x) = n(x)u, \tag{5}$$

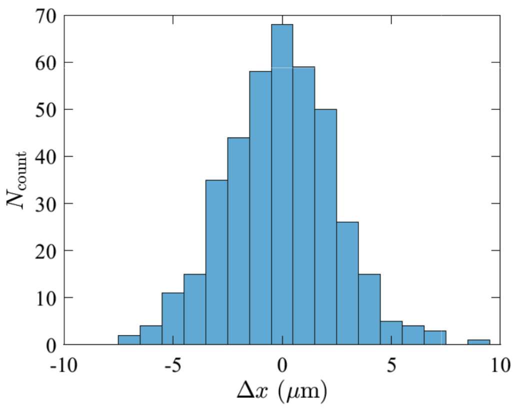
em que u é a velocidade terminal das partículas deslocadas pelo campo.

C.4	Para determinar u, utilizamos a Eq.(1) com $F_{\text{ext}}(t) = QE$. Como $v(t)$ varia, consideramos $\langle v(t) \rangle$. Assumindo $\langle v(0) \rangle = 0$ e utilizando $\langle F(t) \rangle = 0$, determine $\langle v(t) \rangle$ e obtenha o valor de $u = \lim_{t\to\infty} \langle v(t) \rangle$.	0.5pt

C.5	O balanço de fluxo implica que $J_D(x) + J_Q(x) = 0$. Exprima o coeficiente de difusão D em função de k, γ, e T.	0.5pt

Parte D. Deslocamento quadrático médio (2,4 pontos)

Suponha que é observado o movimento browniano de uma partícula coloidal esférica isolada, de raio $a = 5.0\ \mu$m, em água. A figura 3 mostra o histograma dos deslocamentos Δx medidos na direção x em cada intervalo de tempo $\Delta t = 60$ s. O coeficiente de atrito é dado por $\gamma = 6\pi a \eta$ com a viscosidade da água igual a $\eta = 8.9 \times 10^{-4}$ Pa · s e a sua temperatura $T = 25$ °C.



Δx (μm)	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4
N_{count}	0	0	0	2	4	11	15

Δx (μm)	-3	-2	-1	0	1	2	3
N_{count}	35	44	58	68	59	50	26

Δx (μm)	4	5	6	7	8	9	10
N_{count}	15	5	4	3	0	1	0

Fig.3: Histograma da distribuição dos deslocamentos.

D.1	Estimar o valor de N_A, sem usar o facto de ser a constante de Avogadro, até dois algarismos significativos, a partir dos dados da Fig.3. A constante dos gases tem o valor $R = 8.31$ J/K · mol. Não utilize o valor da constante de Boltzmann □ fornecido nas Instruções Gerais. Quanto à constante de Avogadro, pode acontecer que obtenha um valor diferente daquele que está nas Instruções Gerais.	1.0pt

Agora estendemos o modelo da Parte B para descrever o movimento de uma partícula com carga Q sob um campo elétrico E. A velocidade da partícula $v(t)$ considerada na Eq. (2) deve ser substituída por $v(t) = u + v_n \ (t_{n-1} < t \leq t_n)$ com v_n satisfazendo a Eq. (3) e sendo u a velocidade terminal considerada na Eq. (5).

D.2	Exprima o MSD $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ em função de u, D, e t. Obter leis de potência aproximadas para t pequeno e para t grande, bem como o tempo caraterístico t_* em que esta mudança de comportamento ocorre. Desenhe um gráfico aproximado do MSD num gráfico log-log, indicando a localização aproximada de t_*.	0.8pt

De seguida, consideramos os micróbios nadadores (Fig.4(a)), apenas numa dimensão espacial, para simplificar (Fig.4(b)). Trata-se de partículas esféricas com raio a. Nadam à velocidade $+u_0$ ou$-u_0$, sendo o sinal escolhido aleatoriamente em cada intervalo de tempo δ_0, sem correlação. O movimento observado é uma combinação de deslocamentos devidos à natação e de deslocamentos devidos ao movimento browniano de uma partícula esférica.

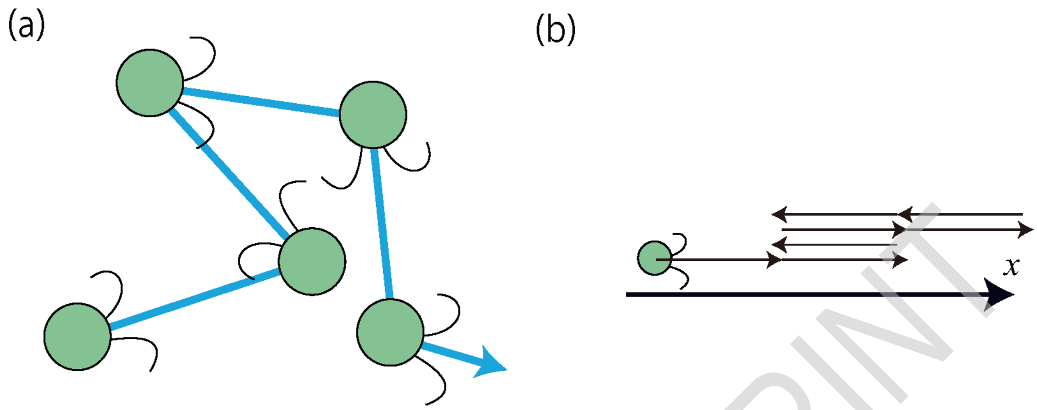


Fig.4: (a) Movimento dos micróbios. (b) Versão unidimensional do deslocamento.

D.3 A Figura 5 apresenta o MSD $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ desses micróbios, mostrando diferentes leis de potência para valores de $t$pequenos, grandes e intermédios, indicadas por linhas a tracejado. Obtenha a lei de potência para cada um dos três intervalos de tempo e expressa-a usando as quantidades necessárias de entre D, u_0, δ_0 e t. **0.6pt**

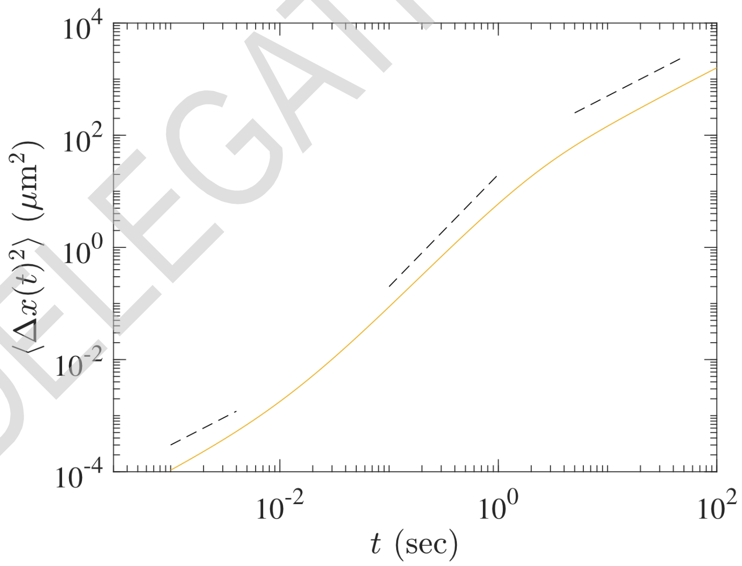


Fig.5: Deslocamento quadrático médio dos micróbios.

Parte E. Purificação da água (1,5 pontos)

Neste ponto discutimos a purificação da água, incluindo as partículas do solo semelhantes a colóides nela dissolvidas, através da adição de electrólitos para as coagular. As partículas interagem através da força de van der Waals e da força eletrostática, esta última incluindo os efeitos das cargas superficiais e da camada circundante de iões com carga de sinal oposto (estes iões e a sua camada são designados por contra-iões e camada dupla elétrica, respetivamente; ver Fig.6(a)). Como resultado, o potencial de interação para uma distância da partícula d (Fig.6(b)) é dado por

$$U(d) = -\frac{A}{d} + \frac{B\epsilon(kT)^2}{q^2}e^{-d/\lambda}, \tag{6}$$

em que A e B são constantes positivas, ϵ é a constante dieléctrica da água e λ é a espessura da camada dupla elétrica. Assumindo que as cargas dos iões são $\pm q$, temos

$$\lambda = \sqrt{\frac{\epsilon kT}{2N_A q^2 c}} \tag{7}$$

onde c é a concentração molar do ião.

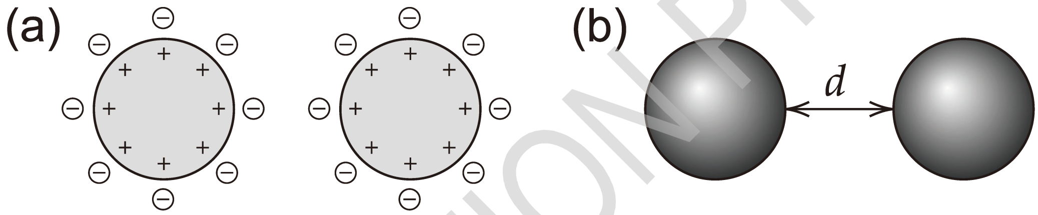


Fig.6: (a) Cargas superficiais das partículas coloidais e dos contra-iões. (b) Definição da distância d.

E.1	A adição de cloreto de sódio (NaCl) à suspensão provoca a coagulação das partículas coloidais. Determinar a menor concentração c de NaCl necessária para que a coagulação ocorra. É suficiente considerar apenas duas partículas sem flutuações térmicas, ou seja, $F(t) = 0$ na Eq.(1), e assumir que a velocidade terminal para a força potencial em causa é atingida instantaneamente.	1.5pt

Estrelas de Neutrões (10 pontos)

Discutimos a estabilidade dos núcleos atómicos grandes e estimamos teórica e experimentalmente a massa das estrelas de neutrões.

Parte A. Massa e estabilidade dos núcleos (2,5 pontos)

A energia em repouso de um núcleo atómico $m(Z,N)c^2$ constituído por Z protões e N neutrões é menor do que a soma das energias em repouso dos protões e dos neutrões, a seguir designados conjuntamente por nucleões, pela energia de ligação $B(Z,N)$, onde c é a velocidade da luz no vazio. Ignorando pequenas correcções, podemos aproximar a energia de ligação à soma do termo de volume a_V, do termo de superfície a_S, do termo de energia de Coulomb a_C e do termo de energia de simetria a_{sym} da seguinte forma.

$$m(Z,N)c^2 = Am_N c^2 - B(Z,N), \qquad B(Z,N) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N-Z)^2}{A}, \tag{1}$$

em que $A = Z + N$ é o número de massa e m_N é a massa do nucleão. No cálculo, utilizar $a_V \approx 15.8\ \mathrm{MeV}$, $a_S \approx 17.8\ \mathrm{MeV}$, $a_C \approx 0.711\ \mathrm{MeV}$, e $a_{\text{sym}} \approx 23.7\ \mathrm{MeV}$ (MeV = 10^6 electrões-volt).

A.1 Usando a condição $Z = N$, determinar A de forma a maximizar a energia de ligação por núcleo, B/A. 0.9pt

A.2 Sob a condição em que A é fixo, o número atómico do núcleo mais estável Z^* é determinado a partir da maximização de $B(Z, A-Z)$. Para $A = 197$, calcule Z^* usando a Eq. (1). 0.9pt

A.3 Um núcleo com um valor de A elevado divide-se em núcleos mais leves através de fissão, de modo a minimizar a energia da massa em repouso total . Por simplicidade, consideramos uma das muitas maneiras de quebrar um núcleo com (Z,N) em dois núcleos iguais, que ocorre quando a seguinte relação de energia é válida, 0.7pt

$$m(Z,N)c^2 > 2m(Z/2, N/2)c^2.$$

Quando esta relação é escrita como

$$Z^2/A > C_{\text{fission}} \frac{a_S}{a_C},$$

obter C_{fission} com até dois algarismos significativos.

Parte B. A estrela de neutrões como um núcleo gigante (1,5 pontos)

Para núcleos grandes, com um número de massa suficientemente elevado $A > A_c$, em relação ao limiar A_c, estes núcleos permanecem estáveis relativamente à fissão nuclear devido à energia de ligação suficientemente grande com origem na gravidade.

B.1	Assumimos que $N = A$ e $Z = 0$ para valores de A suficientemente grandes e que a Eq. (1) continua a ser válida com a adição de um termo de energia de ligação gravitavional. A energia de ligação devida à gravidade é $$B_{\mathrm{grav}} = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R},$$ onde $M = m_N A$ e $R = R_0 A^{1/3}$, com $R_0 \simeq 1.1 \times 10^{-15}$ m $= 1.1$ fm, são a massa e o raio do núcleo, respetivamente. Para $B_{\mathrm{grav}} = a_{\mathrm{grav}} A^{5/3}$, obter a_{grav} , em MeV, até ao primeiro algarismo significativo. Em seguida, ignorando o termo de superfície, estimar A_c até ao primeiro algarismo significativo. No cálculo, utilizar $m_N c^2 \simeq 939\ \mathrm{MeV}$ e $G = \hbar c/M_P^2$, onde $M_P c^2 \simeq 1.22 \times 10^{22}\ \mathrm{MeV}$ e $\hbar c \simeq 197\ \mathrm{MeV \cdot fm}$.	1.5pt

Parte C. Estrela de neutrões num sistema binário (6,0 pontos)

Algumas estrelas de neutrões são pulsares que emitem regularmente ondas electromagnéticas, a que chamamos ”luz” para simplificar, com um período constante. As estrelas de neutrões formam frequentemente sistemas binários com uma anã branca. Consideremos a configuração estelar mostrada na Fig. 1, em que um impulso de luz de uma estrela de neutrões **N** para a Terra **E** passa perto de uma anã branca **W** do sistema binário. A medição destes sinais influenciados pela gravidade da estrela permite estimar com exatidão a massa de **W**, como se explica a seguir, o que resulta numa estimativa da massa de **N**.

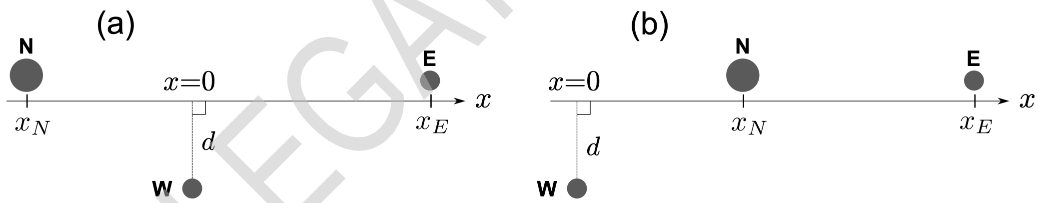
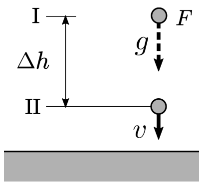


Fig. 1: Configurações com o eixo dos x ao longo da linha que liga **N** a **E**. (a) Para $x_N < 0$ e (b) para $x_N > 0$.

C.1 Como mostra a figura abaixo, sob a aceleração gravitacional constante g colocamos dois níveis I e II com uma diferença de altura $\Delta h (> 0)$. Colocamos relógios idênticos em I, II e F, o sistema em queda livre, designando-os por relógio-I, relógio-II e relógio-F, respetivamente. 1.0pt



Montagem da experiência mental

Assumimos que um observador acompanha o relógio F, e inicialmente F está colocado à mesma altura que o relógio I e a sua velocidade é nula. Como os relógios são idênticos, eles registam intervalos de tempo iguais, $\Delta\tau_F = \Delta\tau_{\mathrm{I}}$. De seguida, deixamos F cair livremente e trabalhamos no sistema de referência de F, que é considerado como sendo inercial. Neste sistema de referência, o relógio II passa pelo relógio F com velocidade v, de modo que a dilatação do tempo do relógio II pode ser determinada através da transformação de Lorentz. Quando um intervalo de tempo $\Delta\tau_{\mathrm{I}}$ passa no relógio F, passa um intervalo de tempo $\Delta\tau_{\mathrm{II}}$ no relógio II.
Determine $\Delta\tau_{\mathrm{II}}$ em função de $\Delta\tau_{\mathrm{I}}$ até à primeira ordem em $\Delta\phi/c^2$, em que $\Delta\phi = g\Delta h$ é uma diferença do potencial gravitacional, *isto* é, a energia potencial gravitacional por unidade de massa.

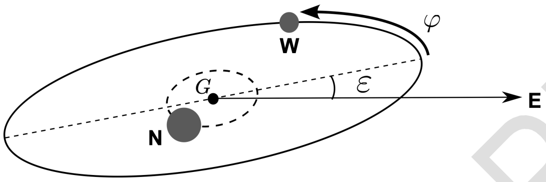
C.2 Sob o efeito do potencial gravitacional ϕ, o atraso temporal varia a velocidade efetiva da luz observada no infinito, c_{eff}, apesar da velocidade local da luz no vazio ser c. Quando $\phi(r = \infty) = 0$, c_{eff} pode ser dada até primeira ordem em ϕ/c^2 como 1.8pt

$$c_{\text{eff}} \approx \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c$$

incluindo o efeito da distorção espacial, que não foi considerada em **C.1**. Note-se que a trajetória da luz pode ser aproximada a uma linha reta.
Como se mostra na Fig. 1 (a), tomamos o eixo dos x ao longo da trajetória da luz desde a estrela de neutrões **N** até à Terra **E**, e colocamos $x = 0$ no ponto em que a anã branca **W** está mais próxima da trajetória da luz. Seja $x_N \,(< 0)$ a coordenada de posição em x de **N**, $x_E \,(> 0)$ a posição de **E** e d a distância entre **W** e a trajetória da luz.
Faça uma estimativa das alterações no tempo de chegada Δt da luz de **N** para **E** causadas pela anã branca com massa M_{WD} e calcule a resposta de uma forma simples, ignorando os termos de ordem superior das seguintes quantidades pequenas : $d/|x_N| \ll 1$, $d/x_E \ll 1$, e $GM_{\text{WD}}/(c^2 d) \ll 1$. Se necessário, use a seguinte fórmula.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+d^2}} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{x^2+d^2}+x}{\sqrt{x^2+d^2}-x}\right) + C. \qquad (\log \text{ is the natural logarithm})$$

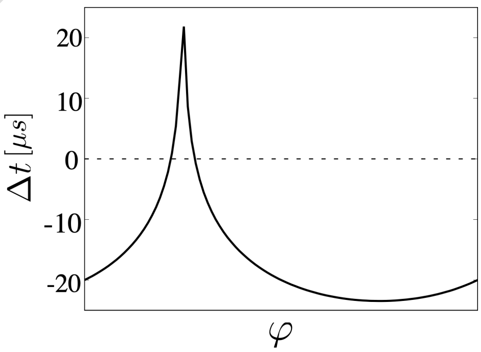
C.3 Como se mostra abaixo, num sistema estelar binário, supõe-se que **N** e **W** estão a mover-se em órbitas circulares com excentricidade zero em torno do centro de massa G no plano da órbita. Seja ε o ângulo de inclinação orbital medido desde o plano da órbita até à linha dirigida de G para **E**, e seja L a distância entre **N** e **W**, e M_{WD} a massa da anã branca. No que se segue, assumimos que $\varepsilon \ll 1$. 1.8pt



Sistema estelar binário.

Observamos sinais luminosos de **N** em **E**, longe de **N**. O percurso da luz até **E** varia com o tempo, dependendo da configuração de **N** e **W.** O atraso no intervalo de tempo de chegada dos sinais a **E** tem um valor máximo Δt_{max} para $x_N \simeq -L$ e o valor mínimo Δt_{min} para $x_N \simeq L$ (veja na Fig.1 (b) a configuração usada). Calcule $\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}}$ de uma forma simples, sem ter em conta os termos de ordem superior nas quantidades pequenas, como se fez em **C.2**. Note que se supõe que os atrasos devidos à gravidade de objectos estelares que não **W** se anulam no cálculo de $\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}}$.

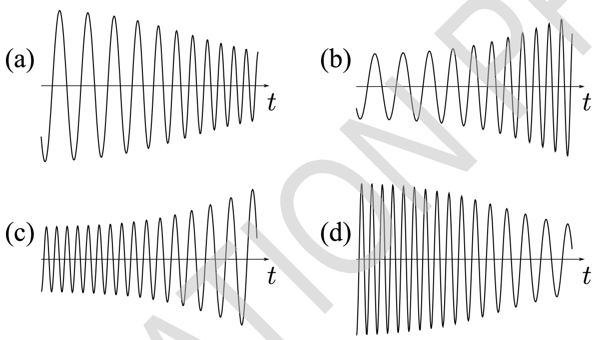
C.4 A figura abaixo mostra os atrasos observados em função da fase orbital φ para um sistema estelar binário com $L \approx 6 \times 10^6\ \mathrm{km}$ e $\cos\varepsilon \approx 0.99989$. Estime M_{WD} em função da massa solar $M_\odot$ e apresente os resultados para a razão $M_{\text{WD}}/M_\odot$ até ao primeiro algarismo significativo. Aqui pode ser usada a relação aproximada $GM_\odot/c^3 \approx 5\,\mu\mathrm{s}$. 0.8pt



Atrasos no tempo observados Δt em função da fase orbital φ (indicada na figura em **C.3**) para localizar **N** e **W** nas órbitas.

C.5 No sistema binário de estrelas de neutrões, duas estrelas libertam energia e momento angular através da emissão de ondas gravitacionais, e acabam por colidir e fundir-se. Por simplicidade, consideremos apenas um movimento circular com raio R e velocidade angular ω, verificando-se $\omega = \chi R^p$ com χ uma constante independente de ω e de R se forem ignoradas os efeitos relativísticos. Determine o valor de p. 0.4pt

C.6 A amplitude da onda gravitacional emitida pelo sistema binário em **C.5** é proporcional a $R^2\omega^2$. A figura abaixo mostra qualitativamente quatro perfis temporais diferentes das ondas gravitacionais observadas antes da colisão de duas estrelas. Seleccione o perfil de (a) a (d) mais adequado. 0.2pt



Perfis de dados observados para ondas gravitacionais.

Água e Objectos (10 pt)

Neste problema, consideramos os fenómenos causados pela interação entre a água e os objectos nela colocados, relacionados com a tensão superficial. A parte A trata do movimento, enquanto as partes B e C lidam com situações estáticas

Se necessário, pode utilizar o facto de que se a função $y(x)$ satisfaz a equação diferencial $y''(x) = ay(x)$ (a é uma constante positiva), então a sua solução geral é $y(x) = Ae^{\sqrt{a}x} + Be^{-\sqrt{a}x}$, onde A e B são constantes arbitrárias.

Parte A. Fusão de gotas de água (2,0 pontos)

Como se mostrado na Fig.1, consideramos duas gotas de água esféricas e estacionárias na superfície de um material super-hidrofóbico, ou seja, existe uma força repulsiva forte entre o material e a água.

Inicialmente, duas gotas de água esféricas idênticas vizinhas são colocadas na superfície; em seguida, estas duas gotas fundem-se depois de se tocarem e formam uma gota de água esférica única maior, que salta subitamente para cima.

A.1 O raio a de cada uma das gotas de água antes da fusão é $100\ \mu$m. A densidade da água ρ é 1.00×10^3 kg/m^3. A tensão superficial γ é 7.27×10^{-2} J/m^2.
Uma fração k da diferença entre a energia superficial antes e depois da fusão das gotas, ΔE, é transformada na energia cinética usada no salto da gota de água final. Determine então a velocidade inicial de salto, v, da gota de água fundida resultante, com dois algarismos significativos, sob os seguintes pressupostos: **2.0pt**

- $k = 0.06$
- Antes e depois da fusão, o volume total de água é conservado.

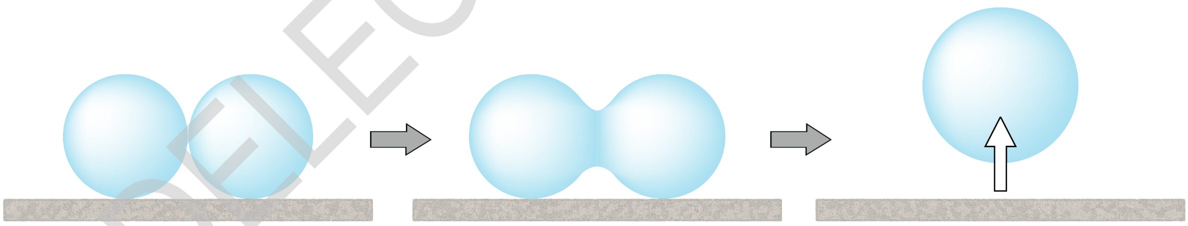


Fig. 1: Fusão de duas gotas de água e salto da gota de água após a fusão.

Parte B. Uma placa colocada verticalmente (4,5 pontos)

Uma placa plana é imersa verticalmente em água. As figuras 2(a) e 2(b) mostram, respetivamente, as formas da superfície da água junto das placas constituídas por materiais hidrofílicos (atrativos) e hidrofóbicos (repelentes). Não é considerada a espessura da placa.

A superfície da placa está no plano yz e a superfície horizontal da água, afastada da placa, está no plano xy com $z = 0$. A forma da superfície não depende da coordenada y. Seja $\theta(x)$ o ângulo entre a superfície da água e o plano horizontal num ponto (x, z) da superfície da água no plano xz. O ângulo $\theta(x)$ é medido em relação ao eixo positivo x e a rotação no sentido anti-horário é considerada positiva. Seja $\theta(x)$ designado como θ_0 no ponto de contacto entre a placa e a superfície da água (com coordenada $x = 0$). A seguir, θ_0 é fixo pelas propriedades do material da placa.

A densidade da água ρ é constante e a tensão superficial da água γ é uniforme. A constante de aceleração gravitacional é dada por g. A pressão atmosférica, P_0, é considerada como sendo sempre uniforme. Nos próximos passos vamos determinar a forma da superfície da água. Note que a unidade de tensão superficial é J/m^2 e também N/m.

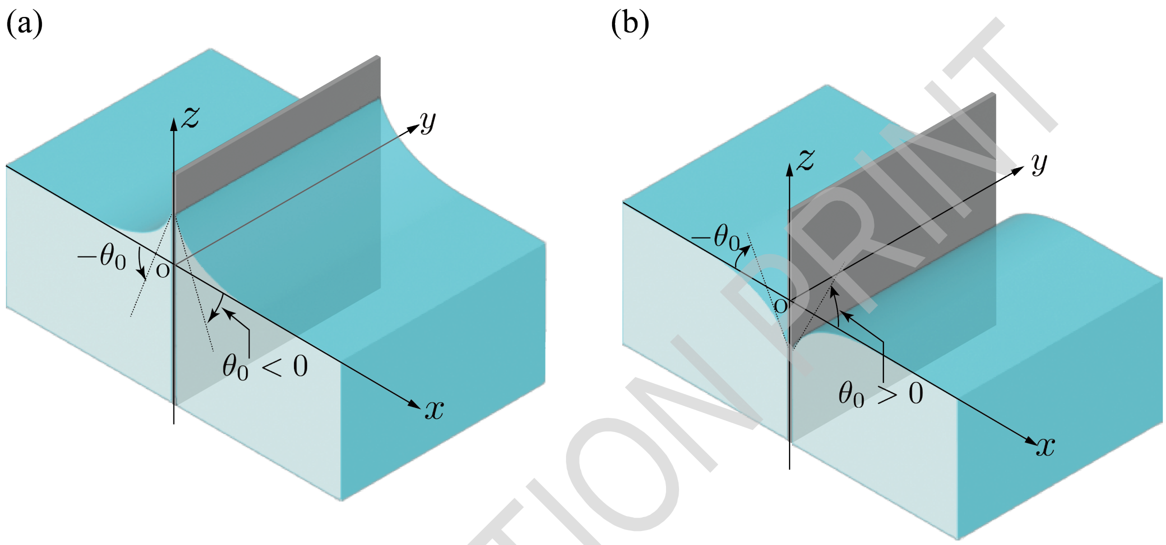


Fig. 2: Placas imersas verticalmente na água. (a) Placa de material hidrofílico; (b) Placa de material hidrofóbico.

B.1	Consideramos o caso de uma placa hidrofílica, como mostra a Fig.2(a). Observamos que a pressão da água, P, satisfaz as condições $P < P_0$ para $z > 0$ e $P = P_0$ para $z = 0$. Então, exprima P no ponto z em termos de ρ, g, z, e P_0.	0.6pt

B.2	Considere um bloco de água cuja forma é apresentada a sombreado na Fig.3(a). A sua secção transversal no plano xz é mostrada como uma área mais escura na Fig.3(b). Sejam z_1 e z_2, respetivamente, as coordenadas do lado esquerdo e direito da fronteira (superfície da água) entre o bloco de água considerado e o ar. Obter uma componente horizontal (componente x) da força total por unidade de comprimento ao longo do eixo y, f_x, que é exercida no bloco de água devido à pressão, em função de ρ, g, z_1, e z_2. Note que P_0 não contribuiu para a força horizontal resultante sobre o bloco de água.	0.8pt

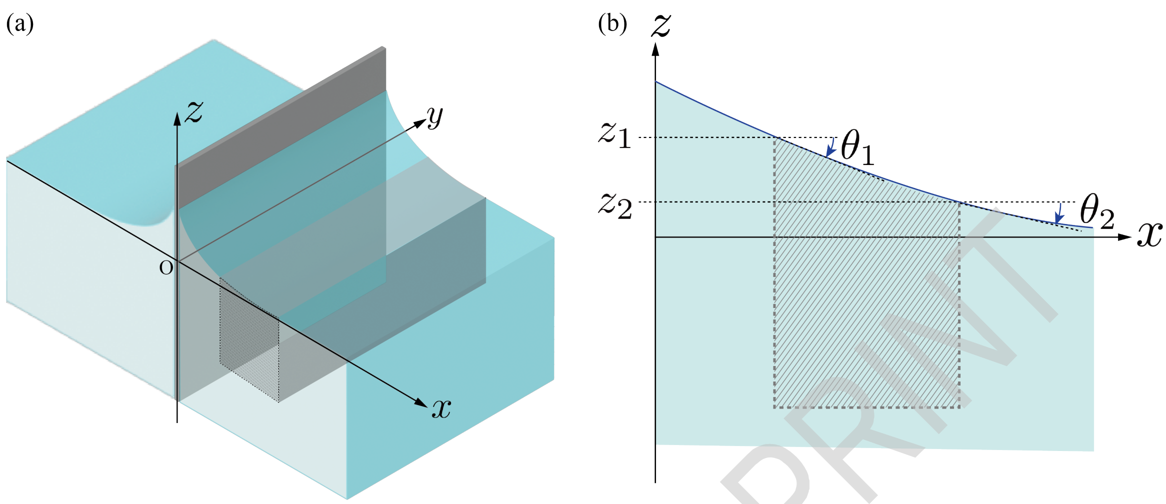


Fig. 3: Forma recortada do bloco de água na superfície da água. (a) Vista aérea e (b) vista em corte transversal.

B.3	A tensão superficial que actua sobre o bloco de água é equilibrada pela força f_x referida em B.2. Definimos, respetivamente, θ_1 e θ_2 como os ângulos entre a superfície da água e o plano horizontal nas extremidades esquerda e direita. Exprima f_x em função de γ, θ_1, e θ_2.	0.8pt

B.4 A equação seguinte é válida qualquer ponto arbitrário (x, z) na superfície da água,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\ell}\right)^a + \cos\theta(x) = \text{constant.} \tag{1}$$

Determine o expoente a e exprima a constante ℓ em função de γ e ρ. Note que esta equação é válida independentemente dos materiais da placa serem hidrofílicos ou hidrofóbicos . — 0.8pt

B.5	Na Eq. (1) em B.4, assumimos que a variação da superfície da água é lenta, ou seja, $\|z'(x)\| \ll 1$, de forma que podemos expandir $\cos\theta(x)$ em relação a $z'(x)$ até à segunda ordem. Depois, diferenciando a equação resultante em relação a x, obtemos a equação diferencial a que $z(x)$ satisfaz. Resolva esta equação diferencial e determine $z(x)$ para $x \geq 0$ em função de $\tan\theta_0$ e ℓ. Note que as dimensões nas direções verticais apresentadas nas Figs. 2 e 3 estão exageradas para melhor visualização e não satisfazem a condição $\|z'(x)\| \ll 1$.	1.5pt

Parte C. Interação entre duas varetas (3,5 pontos)

As varetas idênticas A e B, feitas do mesmo material, que flutuam na superfície da água em posições paralelas, são colocadas à mesma distância do eixo dos y (Fig.4).

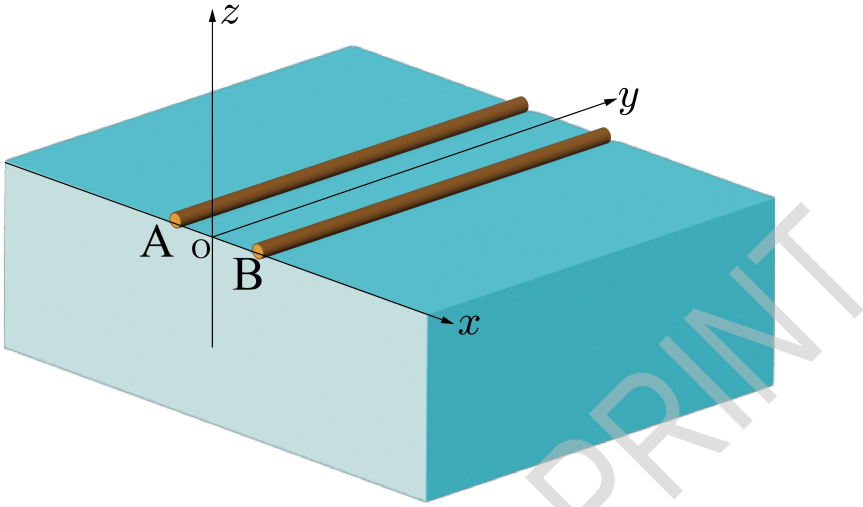


Fig. 4: Duas varetas A e B paralelas a flutuar na superfície da água.

C.1	Nos pontos de contacto da vareta B com a superfície da água, definimos as coordenadas z_a e z_b ao longo do eixo dos z, e também os ângulos θ_a e θ_b, como indicado na Fig.5. Determine a componente horizontal da força por unidade de comprimento ao longo do eixo y, F_x, na vareta B em função de θ_a, θ_b, z_a, z_b, ρ, g, e γ.	1.0pt

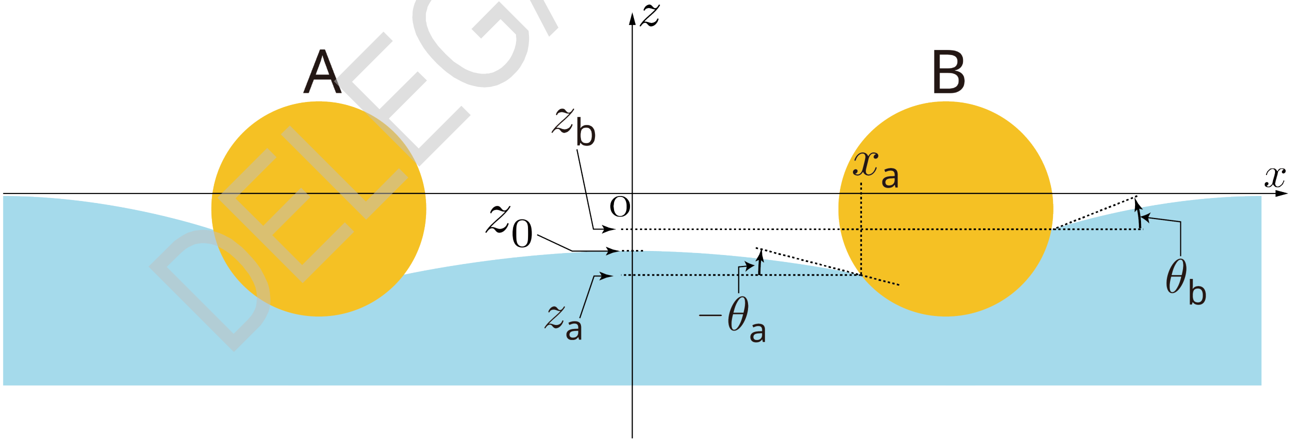


Fig. 5: Corte transversal vertical de duas varetas paralelas a flutuar na superfície da água.

C.2	Definimos a coordenada z da superfície da água, z_0, no ponto médio de duas varetas no plano xz. Exprima a força F_x obtida em C.1 sem usar θ_a, θ_b, z_a, e z_b.	1.5pt

C.3	Seja x_a a coordenada x do ponto de contacto entre a superfície da água e o lado esquerdo da vareta B. Utilizando a equação diferencial obtida em B.4, exprima a coordenada do nível da água z_0 do ponto médio entre estas duas varetas A e B em função de x_a e z_a. Pode utilizar a constante ℓ introduzida em B.4.	1.0pt