



Física do planeta (10 pontos)

Este problema consiste em dois problemas independentes relacionados com o interior do planeta. Os efeitos da curvatura da superfície do planeta podem ser desprezados. Pode precisar de usar a fórmula

$$(1 + x)^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon x, \text{ quando } |x| \ll 1. \quad (1)$$

Parte A. Dorsal meso-oceânica (5,0 pontos)

Considere um grande recipiente com água, que está situado num campo gravitacional uniforme com aceleração gravítica vertical g . Duas placas retangulares verticais, paralelas entre si, são encaixadas no recipiente de modo que as bordas verticais das placas fiquem em contato perfeito, sem fendas, com as paredes verticais do recipiente. Uma altura h de cada placa é imersa em água (Fig. 1, lado esquerdo). A largura das placas ao longo do eixo y é w , a densidade da água é ρ_0 .

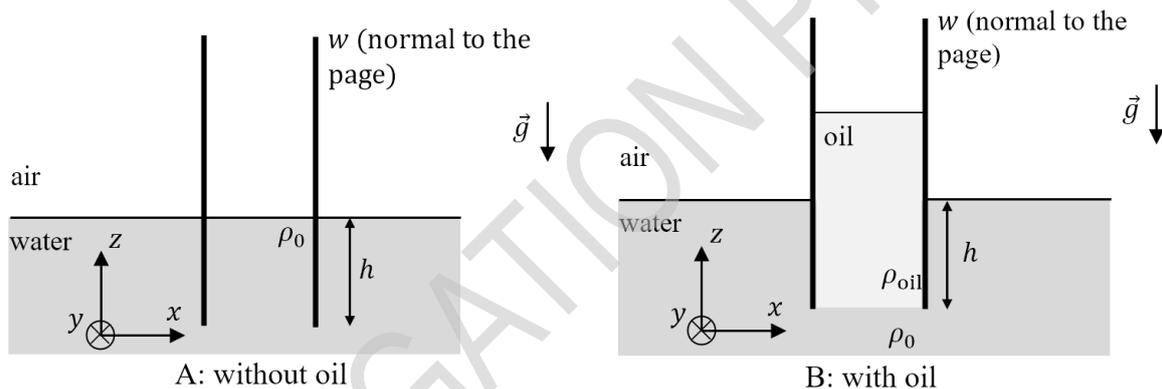


Figura 1. Placas paralelas na água.

Óleo de densidade ρ_{oil} ($\rho_{oil} < \rho_0$) é derramado no espaço entre as placas até que o nível inferior do óleo alcance as bordas inferiores das placas (ver figura 1, lado direito). Assuma que as placas e as bordas do recipiente sejam altas o suficiente para que o óleo não transborde. A tensão superficial e a mistura de fluidos podem ser desprezadas.

- A.1** Qual é a componente x da força resultante total F_x a que fica sujeita a placa do lado direito (amplitude e sentido)? 0.8pt

A Fig. 2 mostra uma secção transversal esquemática da dorsal ou crista meso-oceânica. Consiste em camadas sobrepostas de manto, crosta e água do oceano. O manto é composto por rochas, que assumimos podem fluir em escalas de tempo geológicas e, portanto, neste problema será tratado como um fluido. A espessura da crosta é muito menor do que a escala de comprimento característica na direção x , portanto, a crosta comporta-se como uma placa capaz de adquirir curvatura. Com uma elevada precisão, a dorsal pode ser modelada como um sistema bidimensional, sem qualquer alteração do valor das variáveis ao longo do eixo y , que é perpendicular ao plano da Fig. 2. Suponha que o comprimento L da crista ao longo do eixo y é muito maior do que qualquer outro comprimento introduzido neste problema.

No centro da crista, a espessura da crosta é considerada zero. Conforme a distância horizontal x relativamente ao centro aumenta, a crosta fica mais espessa e aproxima-se de uma espessura constante D à medida que $x \rightarrow \infty$. Do mesmo modo, o fundo do oceano baixa de uma altura h vertical abaixo do topo



da crista O , que definimos como a origem do nosso sistema de coordenadas (ver Fig. 2). A densidade da água ρ_0 e a temperatura T_0 da água podem ser consideradas constantes no espaço e no tempo. O mesmo pode ser assumido para a densidade do manto e a sua temperatura. A temperatura T da crosta também é constante no tempo, mas pode depender da posição.

Sabe-se que, com elevada precisão, o material da crosta se expande linearmente com a temperatura T . Como as temperaturas da água e do manto são consideradas constantes, é conveniente usar uma versão redimensionada do coeficiente de expansão térmica. Deste modo, $l(T) = l_1 [1 - k_l(T_1 - T) / (T_1 - T_0)]$, onde l é o comprimento de um pedaço de material da crosta, l_1 é o seu comprimento à temperatura T_1 e k_l é o coeficiente de expansão térmica redimensionado, que pode ser assumido como constante.

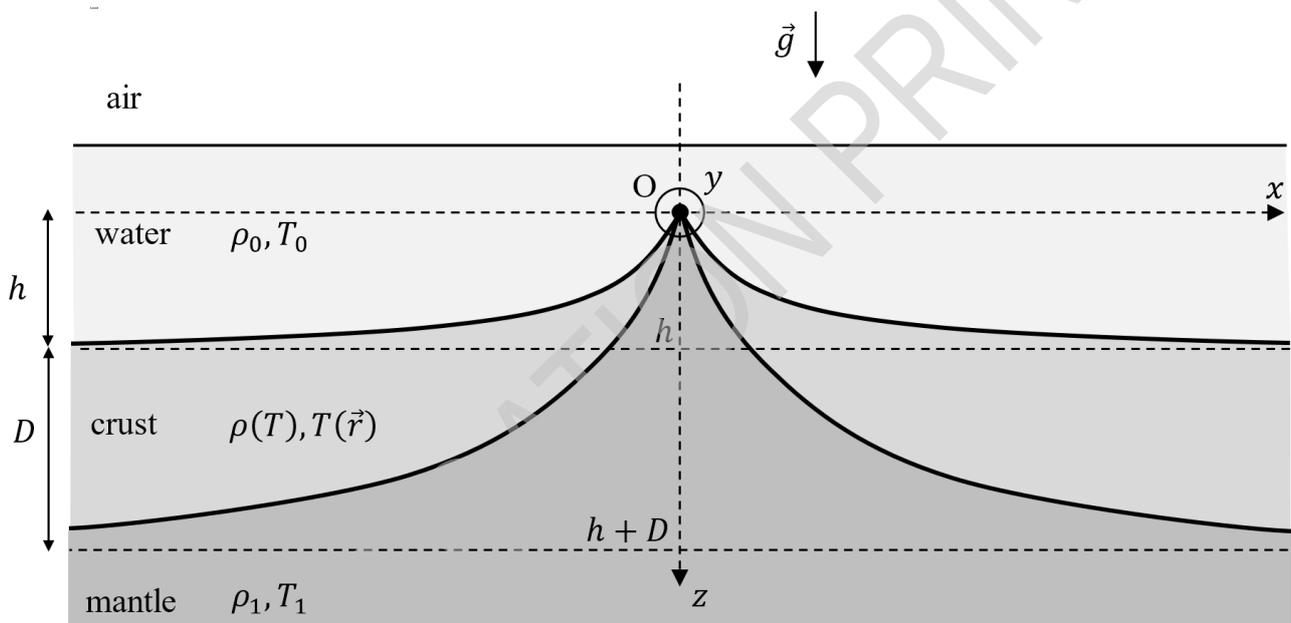


Figura 2. Dorsal meso-oceânica. Note que o eixo z aponta para baixo.

- A.2** Supondo que o material que constitui a crosta é isotrópico, determine como a sua densidade ρ depende da temperatura T . Considerando que $|k_l| \ll 1$, escreva a sua resposta na forma aproximada 0.6pt

$$\rho(T) \approx \rho_1 \left[1 + k \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right], \quad (2)$$

onde termos de ordem k_l^2 e superiores são desprezados. De seguida, identifique a constante k .

Sabe-se que $k > 0$. Além disso, a condutividade térmica da crosta, κ , pode ser considerada constante. Consequentemente, muito longe do eixo da dorsal, a temperatura da crosta varia linearmente com a profundidade.

A.3 Ao assumir que o manto e a água se comportam como um fluido incompressível em equilíbrio hidrostático, exprima a espessura da crosta à distância D em função de h , ρ_0 , ρ_1 e de k . Qualquer movimento do material pode ser desprezado. 1.1pt

A.4 Determine, em primeira ordem em k , a força horizontal resultante total F na metade direita ($x > 0$) da crosta em função de ρ_0 , ρ_1 , h , L , k e g . 1.6pt

Assuma que a crosta fica isolada termicamente do resto da Terra. Como resultado da condução de calor, as temperaturas nas superfícies superior e inferior da crosta vão aproximar-se até que a crosta atinja o equilíbrio térmico. O calor específico da crosta é c e pode ser considerado constante.

A.5 Usando análise dimensional ou uma análise de ordens de grandeza, estime o tempo característico τ que passa até que, longe da região central da crista, a diferença entre as temperaturas na superfície superior e na superfície inferior da crosta se vai aproximar de zero. Pode assumir que τ não depende das duas temperaturas iniciais da superfície da crosta. 0.9pt

Parte B. Ondas sísmicas num meio estratificado (5,0 pontos)

Suponha que um terremoto breve acontece na superfície do planeta. As ondas sísmicas podem ser consideradas como tendo origem numa fonte linear situada em $z = x = 0$, onde x é a coordenada horizontal e z é a profundidade abaixo da superfície (Fig. 3). A fonte da onda sísmica pode ser considerada muito mais longa do que qualquer outro comprimento considerado nesta questão.

Como resultado do terremoto, um fluxo uniforme das chamadas ondas P longitudinais é emitido em todas as direções no plano xz que têm componente positiva ao longo do eixo z . Como a teoria das ondas num sólido é geralmente complexa, neste problema desprezamos todas as outras ondas emitidas pelo terremoto. A crosta do planeta é estratificada de forma que a velocidade v da onda P depende da profundidade z de acordo com $v = v_0(1 + z/z_0)$, onde v_0 é a velocidade à superfície e z_0 é uma constante positiva conhecida.

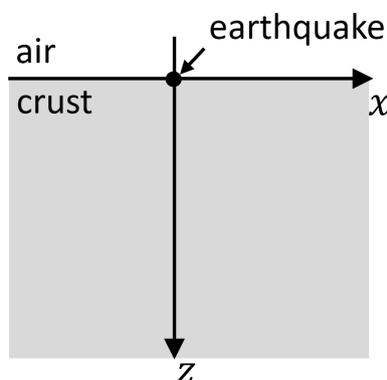


Figura 3. Sistema de coordenadas usado na parte B.



- B.1** Considere um único raio emitido pelo terremoto, que faz um ângulo inicial $0 < \theta_0 < \pi/2$ com o eixo z e se desloca no plano xz . Qual é a coordenada horizontal $x_1(\theta_0) \neq 0$ na qual este raio pode ser detetado à superfície do planeta? Sabe-se que o percurso de um raio é um arco de círculo. Escreva a sua resposta na forma $x_1(\theta_0) = A \cotg(b\theta_0)$, onde A e b são constantes que podem ser determinadas. 1.5pt

Se não conseguiu determinar A e b , nas perguntas seguintes pode usar o resultado $x_1(\theta_0) = A \cotg(b\theta_0)$ desta mesma forma. Suponha que a energia total, por unidade de comprimento da fonte, fornecida como ondas P na crosta durante o terremoto é E . Assuma que as ondas são completamente absorvidas quando alcançam a superfície do planeta vindas de baixo.

- B.2** Determine como a densidade de energia por unidade de área $\varepsilon(x)$ que é absorvida pela superfície do planeta depende da distância ao longo da superfície x . Esboce o gráfico de $\varepsilon(x)$. 1.5pt

De agora em diante, suponha que as ondas são totalmente refletidas ao atingir a superfície. Imagine um dispositivo posicionado em $z = x = 0$ com a mesma geometria da fonte do terremoto considerada anteriormente. O dispositivo é capaz de emitir ondas P com uma distribuição angular escolhida livremente. Fazemos com que o dispositivo emita um sinal numa faixa estreita de ângulos de emissão. Em particular, o ângulo inicial que o sinal faz com a vertical está contido no intervalo $[\theta_0 - \frac{1}{2}\delta\theta_0, \theta_0 + \frac{1}{2}\delta\theta_0]$, onde $0 < \theta_0 < \pi/2$ e $\delta\theta_0 \ll \theta_0$.

- B.3** A que distância x_{\max} ao longo da superfície, medida a partir da fonte, está o ponto mais distante que o sinal não alcança? Escreva a sua resposta em função de θ_0 , $\delta\theta_0$ e de outras constantes fornecidas acima. 2.0pt



Lente eletrostática (10 pontos)

Considere um anel metálico de raio R , com carga distribuída uniformemente, sendo a carga total q . O anel é um toróide oco de espessura $2a \ll R$. Essa espessura pode ser desprezada nas partes A, B, C e E. O plano xy coincide com o plano do anel, enquanto o eixo z é perpendicular a ele, conforme é mostrado na Figura 1. Nas partes A e B pode precisar de usar a fórmula (expansão de Taylor)

$$(1+x)^\epsilon \approx 1 + \epsilon x + \frac{1}{2}\epsilon(\epsilon-1)x^2, \text{ para } |x| \ll 1.$$

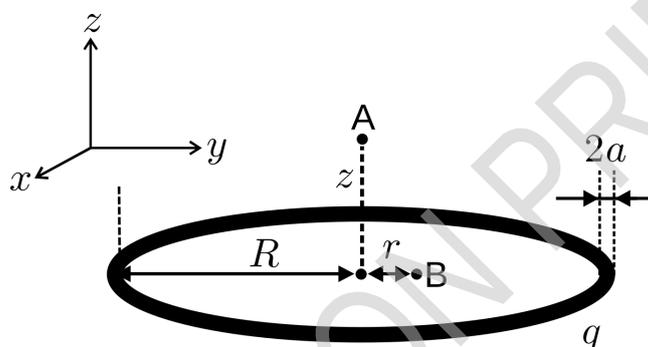


Figura 1. Um anel carregado com raio R .

Parte A. Potencial eletrostático no eixo do anel (1 ponto)

| | | |
|------------|---|-------|
| A.1 | Calcule o potencial eletrostático $\Phi(z)$ ao longo do eixo do anel a uma distância z de seu centro (ponto A na Figura 1). | 0.3pt |
| A.2 | Obtenha a aproximação para o potencial eletrostático $\Phi(z)$ até à potência mais baixa (não nula) de z , assumindo que $z \ll R$. | 0.4pt |
| A.3 | Um elétron (massa m e carga $-e$) é colocado no ponto A (Figura 1, $z \ll R$). Qual é a força a que o elétron fica sujeito nesta posição? Olhando para a expressão da força, determine o sinal de q de modo que o movimento resultante seja oscilatório. O elétron em movimento não influencia a distribuição de carga no anel. | 0.2pt |
| A.4 | Qual é a frequência angular ω de tais oscilações harmónicas? | 0.1pt |

Parte B. Potencial eletrostático no plano do anel (1,7 pontos)

Nesta parte do problema terá que analisar o potencial elétrico $\Phi(r)$ no plano do anel ($z = 0$) para um deslocamento $r \ll R$ (ponto B na Figura 1). Para a menor potência de r diferente de zero, o potencial eletrostático é dado por $\Phi(r) \approx q(\alpha + \beta r^2)$.



B.1 Obtenha a expressão para β . Pode precisar de usar a fórmula da expansão de Taylor dada acima. 1.5pt

B.2 Um eletrão é colocado no ponto B (Figura 1, $r \ll R$). Qual é a força a que o eletrão fica sujeito na nova posição? Olhando para a expressão da força, determine o sinal de q de modo que o movimento resultante corresponda a oscilações harmónicas. O eletrão em movimento não influencia a distribuição de carga no anel. 0.2pt

Parte C. Distância focal de uma lente eletrostática idealizada: carregamento instantâneo (2,3 pontos)

Queremos construir um dispositivo para focar eletrões - uma lente eletrostática. Vamos considerar a seguinte construção. O anel está situado perpendicularmente ao eixo z , conforme é mostrado na Figura 2. Temos uma fonte que produz pacotes de eletrões não-relativísticos, quando se quiser. A energia cinética desses eletrões é $E = mv^2/2$ (v é a velocidade) e eles deixam a fonte em instantes controlados com precisão. O sistema é programado para que o anel tenha carga nula na maior parte do tempo, mas a sua carga fica com o valor q quando os eletrões estão mais próximos do que a distância $d/2$ ($d \ll R$) do plano do anel (região sombreada na Figura 2, chamada "região ativa"). Na parte C, assume-se que os processos de carga e descarga são instantâneos e o campo elétrico também "preenche o espaço" instantaneamente. Pode-se desprezar os campos magnéticos e assumir que a velocidade dos eletrões na direção z é constante. Os eletrões em movimento não perturbam a distribuição de carga no anel.

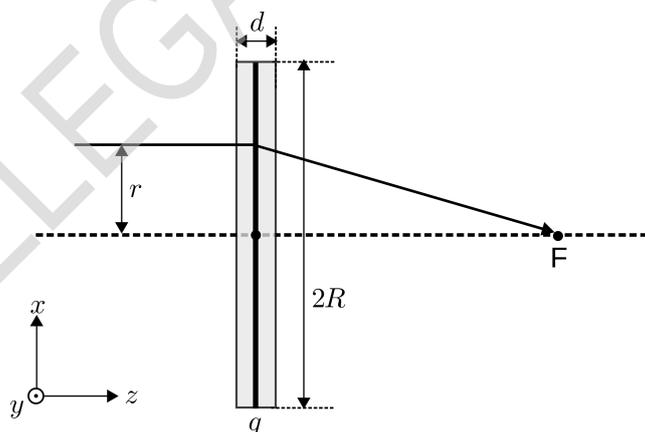


Figura 2. Modelo de uma lente eletrostática.

C.1 Determine a distância focal f desta lente. Suponha que $f \gg d$. Exprima a sua resposta em função da constante β da questão B.1 e de outras quantidades conhecidas. Suponha que antes de atingir a "região ativa" o pacote de eletrões é paralelo ao eixo z e $r \ll R$. O sinal de q é tal que a lente foca os eletrões. 1.3pt

Na realidade, a fonte de eletrões é colocada no eixo z a uma distância $b > f$ à esquerda do centro do anel. Considere que agora os eletrões não são paralelos ao eixo z antes de atingirem a "região ativa", e que são emitidos a partir de uma fonte pontual num intervalo de ângulos $\gamma \ll 1$, relativamente ao eixo z . Os eletrões são focados num ponto situado a uma distância c à direita do centro do anel.



C.2 Determine c . Exprima a sua resposta em função da constante β da questão B.1 e de outras quantidades conhecidas. 0.8pt

C.3 É a equação de uma lente (ótica) fina 0.2pt

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{f}$$

verificada para a lente eletrostática? Mostre explicitamente calculando $1/b+1/c$.

Parte D. O anel como um condensador (3 pontos)

O modelo considerado acima foi idealizado e assumimos que o anel era carregado instantaneamente. Na realidade, o carregamento não é instantâneo, pois o anel é um condensador com uma capacidade C finita. Nesta parte iremos analisar as propriedades deste condensador. Pode precisar dos seguintes integrais:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = -\ln \left| \frac{\cos x + 1}{\sin x} \right| + \text{const}$$

e

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| + \text{const.}$$

D.1 Calcule a capacidade C do anel. Considere que o anel tem uma largura finita $2a$ mas recorde que $a \ll R$. 2.0pt

Quando os elétrons alcançam a "região ativa", o anel é ligado a uma fonte de tensão V_0 (Figura 3). Depois dos elétrons passarem a "região ativa", o anel é ligado outra vez à terra. A resistência dos contactos é R_0 e a resistência do próprio anel pode ser desprezada.

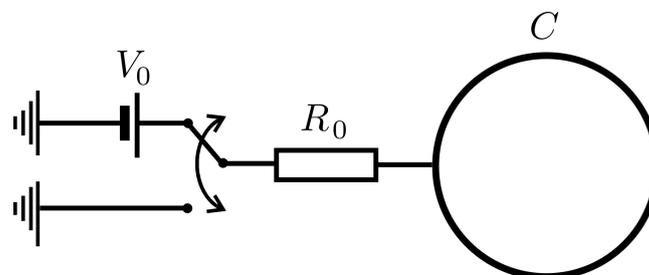


Figura 3. Carregamento da lente eletrostática.



- D.2** Determine a dependência no tempo da carga no anel, $q(t)$, e faça uma representação gráfica esquemática dessa função. $t = 0$ corresponde ao momento em que os eletrões estão no plano do anel. Qual é a carga no anel q_0 quando o valor absoluto $q(t)$ é máximo? A capacidade do anel é C (ou seja, não precisa usar a expressão real encontrada em D.1). 1.0pt
- Observação:* a polaridade desenhada na Figura 3 é apenas para fins indicativos. O sinal deve ser escolhido de forma que a lente esteja a focar os eletrões.

Parte E. Distância focal de uma lente mais realista: carregamento não instantâneo (2,0 points)

Nesta parte do problema, consideraremos a ação destas lentes mais realistas. Aqui mais uma vez iremos desprezar a largura do anel $2a$ e assumiremos que os eletrões se deslocam inicialmente paralelamente ao eixo z antes de atingirem a "região ativa". No entanto, agora o carregamento do anel não é instantâneo.

- E.1** Determine a distância focal f da lente. Considere que $f/v \gg R_0C$, mas d/v e R_0C são da mesma ordem de grandeza. Exprima a sua resposta em função da constante β da parte B e de outras quantidades conhecidas. 1.7pt
- E.2** Verificará que o resultado de f é semelhante ao obtido na parte C, quando o valor de q é substituído por q_{eff} . Determine a expressão para q_{eff} em função das quantidades dadas na formulação do problema. 0.3pt



Partículas e Ondas (10 pontos)

A dualidade onda-partícula, que considera que cada partícula pode ser descrita por uma onda e vice-versa, é um conceito central da mecânica quântica. Neste problema iremos basear-nos neste princípio e noutras suposições simples para estudar uma seleção de fenómenos quânticos onde participam tanto férmions como bósons.

Parte A. Partícula quântica numa caixa (1,4 pontos)

Considere uma partícula de massa m a mover-se num poço de potencial a uma dimensão, onde a sua energia potencial $V(x)$ é dada por:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L; \\ \infty, & x < 0 \text{ or } x > L. \end{cases} \quad (1)$$

Enquanto que uma partícula clássica se pode mover neste potencial não tendo qualquer restrição no valor da sua energia cinética, para partículas quânticas só alguns valores positivos específicos e discretos são permitidos. Num destes estados permitidos a partícula pode ser descrita por uma onda de de Broglie estacionária com nodos nas duas paredes do poço.

- | | | |
|------------|--|-------|
| A.1 | Determine a energia mínima possível E_{\min} da partícula quântica no poço. Escreva a sua resposta em função de m , L e da constante de Planck h . | 0.4pt |
|------------|--|-------|

O estado da partícula com energia mínima chama-se estado fundamental, e os restantes estados permitidos são os estados excitados. Podemos então ordenar os estados com valores crescentes de energia, indicados por E_n , começando com o estado fundamental com energia E_1 .

- | | | |
|------------|--|-------|
| A.2 | Obtenha a expressão geral para a energia E_n (onde $n = 1, 2, 3, \dots$). | 0.6pt |
|------------|--|-------|

- | | | |
|------------|--|-------|
| A.3 | As partículas podem passar instantaneamente de um estado para o outro através da absorção ou emissão de um fóton que tenha energia igual à diferença de energia entre os estados. Determine o comprimento de onda λ_{21} do fóton emitido durante a transição do primeiro estado excitado (energia E_2) para o estado fundamental (energia E_1). | 0.4pt |
|------------|--|-------|

Parte B. Propriedades óticas das moléculas (2,1 pontos)

Nesta parte iremos estudar várias propriedades óticas da molécula da cianina Cy5, um corante bastante utilizado, mostrada esquematicamente na Fig. 1a. As suas propriedades óticas são determinadas principalmente pela linha de carbonos, ligados por ligações covalentes simples e duplas alternadamente, como é mostrado na Fig. 1b. A influência dos anéis aromáticos e dos radicais R, que se encontram nas extremidades da molécula, é muito pequena. Três dos quatro eletrões de valência da cada um dos átomos de carbono C (e dos átomos de azoto N) na região de interesse formam as ligações químicas, enquanto que os restantes eletrões de valência são "partilhados" e podem mover-se ao longo da linha de carbonos. A energia potencial que estes eletrões sentem está indicada na Fig. 1c, por uma linha fina oscilante, que tem mínimos nas posições dos átomos de C e N.

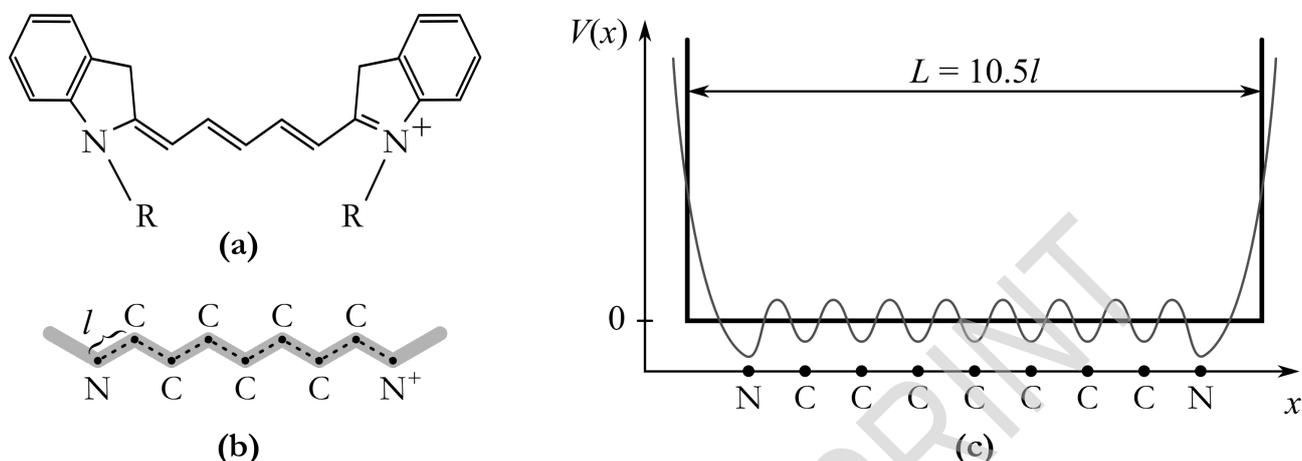


Figura 1. (a) Estrutura da molécula de cianina Cy5 (para simplificar, os átomos de hidrogénio não estão representados, e R representa alguns radicais). (b) Linha central de carbonos da molécula de Cy5, com uma distância média l entre os átomos. (c) Energia potencial de um eletrão ao longo da linha central de carbonos (indicada pela linha fina), e a aproximação com a função dada pela Eq. 1 (indicada com uma linha espessa).

Iremos aproximar esta energia potencial pelo perfil dado pela função mais simples indicada na Eq. 1, com a largura do poço $L = 10.5l$ (ver linha espessa na Fig. 1c). Aqui $l = 140$ pm é a distância inter-atómica média (ver também Fig. 1b). Temos assim um "gás de eletrões" composto por 10 eletrões (7 dos átomos de C, 2 do átomo de N e 1 do ião N⁺), que se movem no poço de potencial unidimensional discutido na parte A. Podemos considerar que os eletrões não interagem uns com os outros, mas terá de ter em conta que os eletrões são fermiões e que obedecem ao princípio de exclusão de Pauli. Desprezamos também a influência de outros eletrões bem como o movimento do núcleo

B.1 Calcule o maior comprimento de onda λ de um fotão que pode ser absorvido pela molécula de Cy5 considerando que este sistema de eletrões está inicialmente no seu estado fundamental. Escreva a resposta em função de l , de constantes físicas, incluindo um pré-fator numérico. Calcule o valor numérico. 0.8pt

B.2 Uma outra molécula Cy3 tem estrutura similar mas a linha de carbonos é mais curta, tendo menos 2 átomos de carbono. O seu espetro de absorção terá um desvio na direção do azul ou do vermelho, quando comparado com a molécula de Cy5? Obtenha numericamente o valor $\Delta\lambda$ deste desvio espectral. Pode assumir que removendo dois átomos de carbono não altera a forma da molécula e apenas torna o comprimento da cadeia central mais curta de duas distâncias interatómicas. 0.4pt

Encontrando-se num estado excitado, a molécula pode sofrer uma transição espontânea para o seu estado fundamental através da emissão de um fotão. A taxa média K de ocorrência deste evento (isto é, o decréscimo relativo do número de moléculas que estão no estado excitado, dN/N , no intervalo de tempo dt , $K = \frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$) é determinada pelo comprimento de onda λ do fotão emitido, pelo momento dipolar elétrico da transição d (que é da ordem de $d \approx el$, onde e é a carga elementar), pela permitividade do vazio ϵ_0 e pela constante de Planck, h .



B.3 Usando de análise dimensional, determine a expressão para a taxa de emissão espontânea em função de ε_0 , h , λ , e d . O pré-fator numérico para esta expressão é $k = \frac{16}{3}\pi^3$. 0.7pt

B.4 Para a molécula de Cy5 o momento dipolar é $d \approx 2.4el$. Calcule o tempo médio de vida de fluorescência do estado excitado de menor energia da molécula Cy5, τ_{Cy5} , que é o inverso da taxa de transição emissiva deste estado excitado para o estado fundamental. 0.2pt

Parte C. Condensação de Bose-Einstein (1,5 pontos)

Esta parte não está diretamente relacionada com as Partes A e B. Aqui, estudaremos o comportamento coletivo das partículas bosônicas. Os bósons não seguem o princípio de exclusão de Pauli e - a baixas temperaturas ou altas densidades - experimentam um fenómeno dramático conhecido como condensação de Bose-Einstein (BEC). Esta é uma transição de fase para um estado quântico coletivo intrigante: um grande número de partículas idênticas "condensam" num único estado quântico e começam a comportar-se como uma única onda. A transição é tipicamente alcançada pelo arrefecimento de um número fixo de partículas abaixo da temperatura crítica. Em princípio, ele também pode ser induzido mantendo a temperatura fixa e aumentando a densidade das partículas acima do seu valor crítico.

Começamos por explorar a relação entre a temperatura e a densidade de partículas na transição. Na realidade, uma estimativa do valor da temperatura crítica pode ser obtida a partir da seguinte observação: *a condensação de Bose-Einstein ocorre quando o comprimento de onda de de Broglie das partículas é igual à distância característica entre as partículas do gás.*

C.1 Considere um gás de átomos de ^{87}Rb em equilíbrio térmico que não interatuam entre si. Escreva as expressões para o momento linear p típico dos átomos e para o seu comprimento de onda de de Broglie λ_{dB} em função da massa dos átomos m , da temperatura do gás T e de constantes físicas. 0.4pt

C.2 Calcule a distância típica, ℓ , entre as partículas num gás em função da densidade de partículas n . Deduza então o valor da temperatura crítica T_c em função da massa atômica, densidade de partículas e constantes físicas. 0.5pt

Para produzir experimentalmente um condensado de Bose-Einstein é necessário arrefecer gases até temperaturas da ordem de $T_c = 100$ nK

C.3 Qual é a densidade de partículas do gás de Rb, n_c , se a transição ocorre a essa temperatura? Como ponto de comparação, calcule também a densidade de partículas n_0 de um gás ideal em condições normais de pressão e temperatura (PTN), i.e, a $T_0 = 300$ K e a $p_0 = 10^5$ Pa. Por quantas vezes é o gás a PTN mais denso que o gás do condensado de Bose-Einstein a baixa temperatura? Pode assumir que a massa dos átomos é igual a 87 unidades de massa atômica (m_{amu}). 0.6pt

Parte D. Rede ótica de três raios (5,0 pontos)

Os primeiros condensados de Bose-Einstein foram produzidos em 1995, e desde essa altura houve vários



trabalhos experimentais no tema. Nesta parte irá ser investigado um método experimental que tem sido muito frutífero: colocar o condensado num potencial periódico no espaço que é criado por vários raios lasers coerentes. Devido à natureza periódica dos padrões de interferência obtidos por esta técnica, eles são conhecidos por *redes óticas*. A energia potencial $V(\vec{r})$ de um átomo que se move na rede ótica é proporcional à intensidade de luz local, e nos seus cálculos pode assumir que:

$$V(\vec{r}) = -\alpha \langle |\vec{E}(\vec{r}, t)|^2 \rangle. \quad (2)$$

Aqui, α é uma constante *positiva*, e os parênteses $\langle \dots \rangle$ indicam o valor médio no tempo, eliminando assim os termos que oscilam rapidamente. O campo elétrico produzido pelo laser i é descrito por

$$\vec{E}_i = E_{0,i} \vec{\varepsilon}_i \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t), \quad (3)$$

com amplitude $E_{0,i}$, vetor de onda \vec{k}_i , e vetor unitário indicando a polarização $\vec{\varepsilon}_i$.

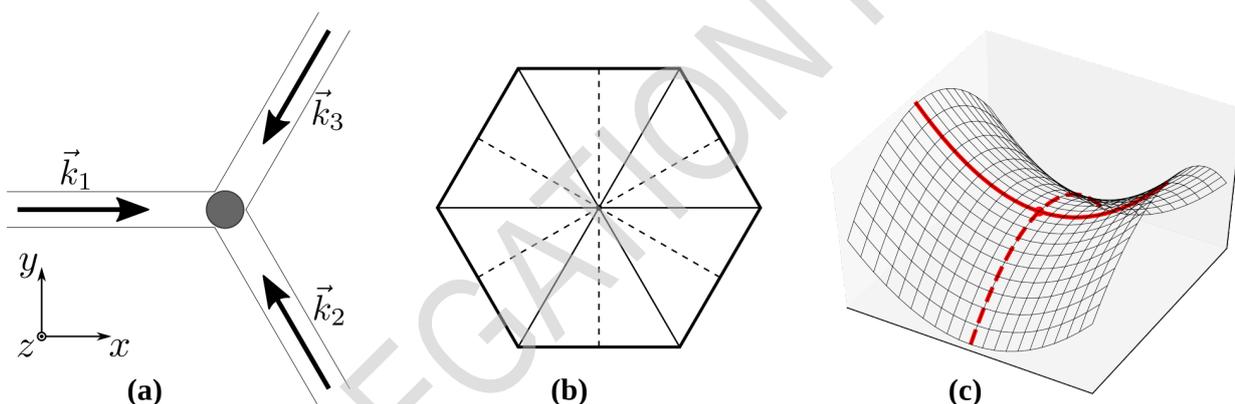


Figure 2. (a) Rede ótica de três raios laser: três ondas planas com vetores de onda $\vec{k}_{1,2,3}$ interseam-se e interferem na região indicada pelo círculo cinzento. (b) Simetrias de um hexágono regular: as linhas a cheio e a tracejado mostram dois conjuntos de eixos de simetria. (c) Ponto sela: ponto numa superfície que tem declive nulo em todas as direções mas que não é um extremo local da função. Seguindo pela trajetória indicada pela linha a cheio encontra-se um mínimo aparente. A análise adicional na direção perpendicular (linha a tracejado) é necessária para distinguir um mínimo verdadeiro de um ponto sela.

A tarefa é estudar as *redes óticas triangulares* produzidas pela interferência de três raios laser coerentes de igual intensidade. A montagem típica encontra-se indicada na Fig. 2a. Aqui, os três feixes encontram-se polarizados na direção z , propagam-se no plano xy e intersectam-se fazendo ângulos iguais de 120° . Escolha a direção do eixo dos x paralelo ao vetor de onda \vec{k}_1 .

D.1 Usando as Eqs. 2 e 3 obtenha a expressão para a energia potencial $V(\vec{r})$ como função de $\vec{r} = (x, y)$ no plano dos raios laser. 1.4pt

Pista: o resultado pode ser escrito como um termo constante mais uma soma de três cossenos com argumentos $\vec{b}_i \cdot \vec{r}$. Escreva a sua solução nesta forma e identifique os vetores \vec{b}_i .



- D.2** A energia potencial resultante tem uma simetria rotacional hexagonal, i.e. a energia potencial é invariante a rotações por ângulos múltiplos de 60° em torno da origem. Apresente um argumento simples que prove que esta simetria se verifica. 0.5pt

A simetria simplifica a análise da distribuição da energia potencial a duas dimensões $V(\vec{r})$. Como é mostrado na Fig. 2b, um hexágono regular tem linhas de simetria que ligam, respetivamente, vértices opostos (linhas a cheio) e pontos médios de lados opostos (linhas a tracejado). Logo, na nossa situação, não é necessário fazer e estudar gráficos de potencial bidimensionais, pois muita informação pode ser deduzidos focando o estudo nos os eixos de coordenadas x e y ao longo das linhas de simetria.

- D.3** Obtenha o comportamento do potencial $V(\vec{r})$ ao longo dos eixos das coordenadas, i.e., determine as funções $V_X(x) \equiv V(x, 0)$ e $V_Y(y) \equiv V(0, y)$. Identifique os locais dos extremos de $V_X(x)$ e de $V_Y(y)$, considerando estas funções como sendo funções de um só argumento. Como estas funções são periódicas, inclua na sua lista somente um extremo representativo de cada família de máximos e mínimos que são repetidos periodicamente. 1.2pt

Estamos interessados em determinar os *vértices da rede ótica*, ou seja, os mínimos do potencial a duas dimensões $V(\vec{r})$. Os mínimos que obteve para as funções V_X e V_Y identificam as posições possíveis para os mínimos locais da função a 2D, mas ainda devem ser verificados de forma a eliminar os pontos sela. Como é mostrado na Fig. 2c, quando se estuda a variação da função ao longo de uma linha, um ponto sela pode-se apresentar como sendo um mínimo quando não é esse o caso.

- D.4** Revisite os resultados da questão anterior de forma a determinar os mínimos reais da rede ótica. Identifique todos os mínimos equivalentes mais próximos da origem (mas não coincidentes com a origem). Qual é a distância a entre os mínimos mais próximos, ou por outras palavras, qual é a *constante de rede* da rede ótica? Escreva a sua resposta em função do comprimento de onda do laser λ_{las} . 0.8pt

A neutralidade de carga dos átomos ultra-frios sugere que as suas interações só se tornam relevantes quando dois ou mais átomos se encontrarem no mesmo mínimo de potencial da rede ótica. Contudo os experimentalistas também exploram condições que mantêm interações atômicas a maiores distâncias. É possível a criação de *átomos de Rydberg* que são enormes e têm várias propriedades exageradas. Os átomos de Rydberg são átomos excitados nos quais um eletrão ocupa um estado com um número quântico principal muito elevado n . O tamanho de um átomo de Rydberg pode ser estimado calculando o raio de uma órbita clássica de um eletrão com momento angular $n\hbar$, onde \hbar é a constante de Planck reduzida.

- D.5** Calcule o valor de n que corresponde ao raio de um átomo de Rydberg de Rb que seja comparável ao comprimento de onda do laser $\lambda_{\text{las}} = 380$ nm. Escreva a sua resposta em função de λ_{las} e de constantes físicas e obtenha um valor numérico para n . 1.1pt