

Molas de comprimento zero e molas "slinky"

Uma Mola de Comprimento efetivo igual a Zero (MCZ) é uma mola para a qual a força é proporcional ao seu comprimento, $F = kL$ para $L > L_0$ onde L_0 é o comprimento mínimo da mola (e também o seu comprimento quando não está esticada). A Figura 1 mostra a relação entre a força F e o comprimento da mola L para uma MCZ, onde o declive da reta é a constante da mola k .

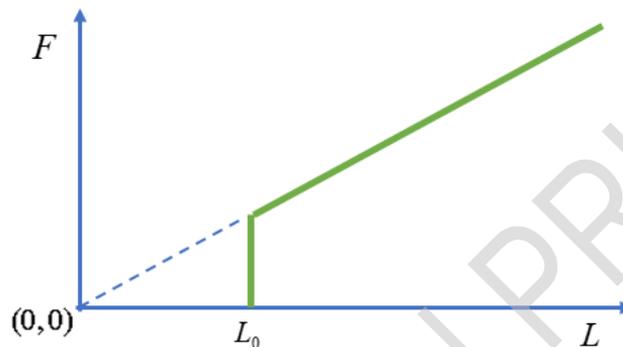


Figura 1: Relação entre a força F e o comprimento L da mola.

Uma MCZ é útil em sismografia e permite medições muito precisas de alterações na aceleração gravitacional g . Neste problema vamos considerar uma MCZ homogênea cujo peso Mg excede kL_0 . Definimos a relação adimensional, $\alpha = kL_0/Mg < 1$, para caracterizar a rigidez relativa da mola. O brinquedo conhecido por "slinky" pode ser considerado uma MCZ (mas não necessariamente).

Parte A: Estática (3.0 pontos)

A.1 Considere um segmento não esticado da MCZ de comprimento $\Delta\ell$ que será posteriormente esticado por uma força F , não considerando a força da gravidade. Qual é o comprimento Δy deste segmento em função de F , $\Delta\ell$ e dos parâmetros da mola? 0.5pt

A.2 Para um segmento de comprimento $\Delta\ell$, calcule o trabalho ΔW necessário para o esticar desde o seu comprimento inicial $\Delta\ell$ até um comprimento Δy . 0.5pt

Ao longo desta questão, representaremos um ponto da mola pela sua distância $0 \leq \ell \leq L_0$ a partir da parte inferior da mola, quando não está esticada. Em particular, para todos os pontos da mola, ℓ permanece inalterado à medida que a mola se distende.

A.3 Suponha que penduramos a mola pela sua extremidade superior, de modo a ficar esticada pelo seu próprio peso. Qual é o comprimento total H da mola suspensa em equilíbrio? Escreva a sua resposta em termos de L_0 e de α . 2.0pt

Part B: Dinâmica (5.5 pontos)

Experiências mostram que quando a mola é suspensa em repouso e depois solta, contrai-se gradualmente a partir do topo, enquanto a parte inferior permanece imóvel (veja a Figura 2). À medida que o tempo avança, a parte de cima move-se como um bloco sólido e vai acumulando espiras adicionais da

mola, enquanto a parte imóvel fica mais curta. Cada ponto da mola começa a mover-se somente quando a parte móvel o alcança. A extremidade inferior da mola começa a mover-se somente quando a mola está totalmente colapsada e atinge o seu comprimento não esticado L_0 . Depois disso, a mola contraída continua caindo para baixo, sem rodar, como um corpo rígido sob a influência da gravidade.

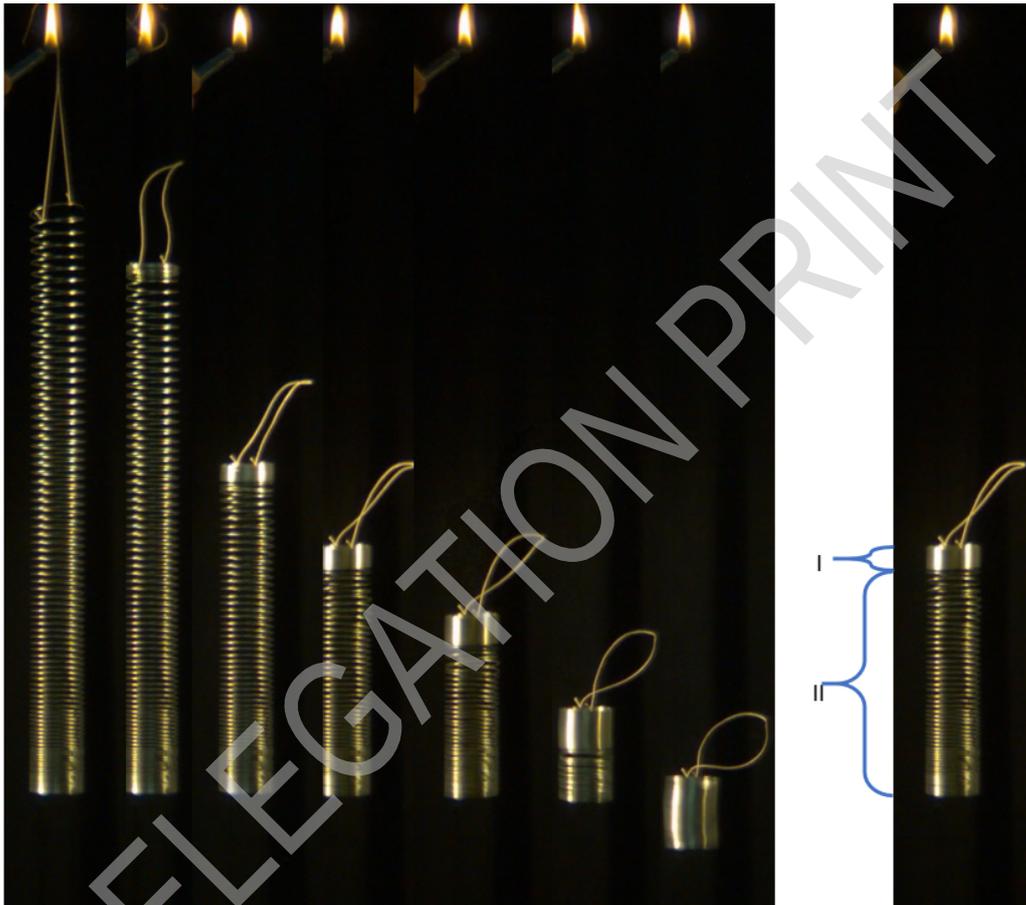


Figura 2: Esquerda: sequência de imagens obtidas durante a queda livre da mola. Direita: a parte móvel I e a parte imóvel II, durante a queda livre da mola.

Nas restantes questões deste problema, baseie a sua resolução no modelo acima descrito. Pode desprezar a resistência do ar, mas não pode desprezar L_0 .

- B.1** Calcule o tempo t_c que leva desde o momento em que a mola é solta, até que ela volte completamente ao seu comprimento mínimo L_0 . Escreva a sua resposta em termos de L_0 , g e α . Calcule o valor numérico de t_c para uma mola com $k = 1.02 \text{ N/m}$, $L_0 = 0.055 \text{ m}$ e $M = 0.201 \text{ kg}$, considerando g igual a 9.80 m/s^2 . 2.5pt



B.2 Nesta questão, ℓ é usado para representar a coordenada do ponto de separação entre as partes I (na figura 2, a parte móvel) e II (a parte imóvel). Num determinado momento, enquanto ainda existe uma parte imóvel, sua massa é $m(\ell) = \frac{\ell}{L_0} M$ e a parte móvel move-se com uma velocidade instantânea uniforme $v_I(\ell)$. Mostre que neste momento (enquanto existe uma parte imóvel) a velocidade da parte móvel é $v_I(\ell) = \sqrt{A\ell + B}$. Escreva as constantes A e B em função de L_0 , g e α . 2.5pt

B.3 Com base em B.2, calcule a velocidade mínima v_{\min} da parte móvel da mola durante o seu movimento, após ter sido solta e antes de atingir o solo. Escreva a sua resposta em função de L_0 , α , A e B . 0.5pt

Parte C: Energética (1.5 pontos)

C.1 Calcule a energia mecânica dissipada Q através da geração de calor, a partir do momento em que a mola é solta até pouco antes de a mola atingir o solo. Escreva a sua resposta em função de L_0 , M , g e α . 1.5pt

DELEGATION PRINT

A Física de um Forno Microondas

Este problema discute a produção de radiação num microondas e seu uso para aquecer alimentos. Nestes aparelhos, a radiação de microondas é produzida num dispositivo chamado "magnetron". A parte A do problema diz respeito ao funcionamento do magnetron, enquanto a parte B trata da absorção da radiação de microondas pelos alimentos.

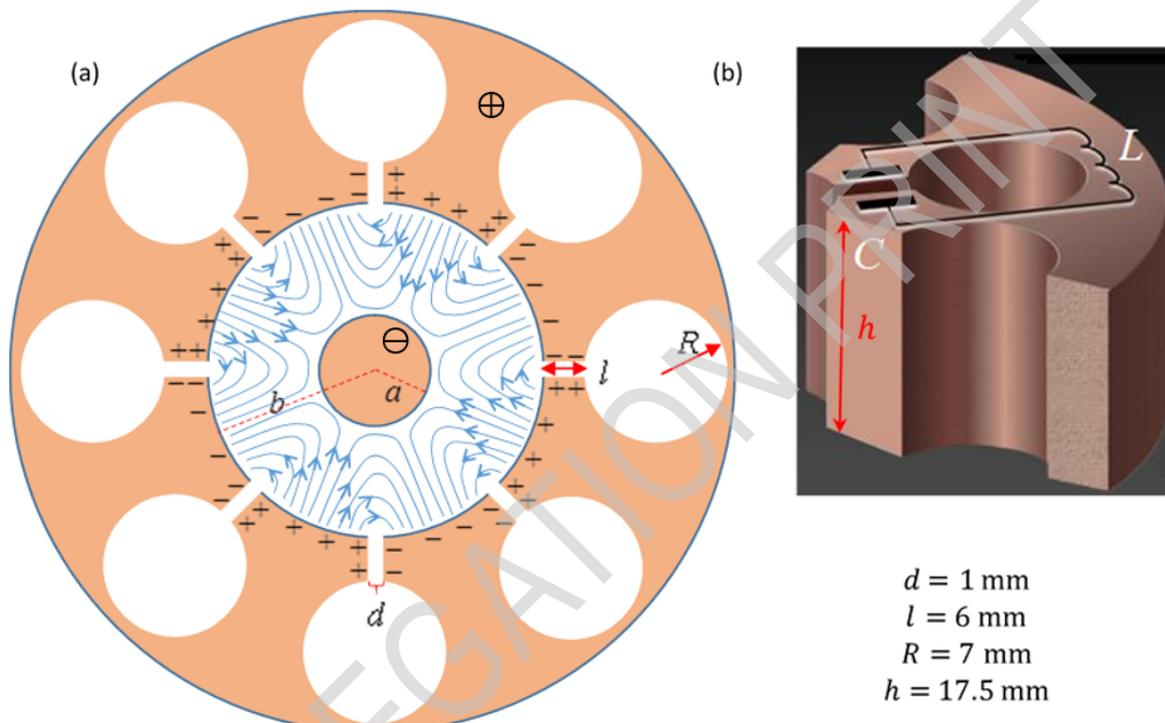


Figura 1

Parte A: Estrutura e operação de um magnetron (6.6 pontos)

Um magnetron é um dispositivo que permite gerar radiação de microondas, quer em pulsos (por exemplo num radar), quer continuamente (por exemplo num forno de microondas). O magnetron possui um modo de oscilações auto-amplificadas. Fornecendo uma diferença de potencial contínua (não alternada) rapidamente se atinge esse modo. A radiação de microondas assim produzida é transmitida para fora do magnetron.

Um magnetron de um forno de microondas normal consiste num cátodo cilíndrico de cobre sólido (com raio a) e num ânodo circundante (com raio b). Este último, tem a forma de uma concha cilíndrica espessa na qual são perfuradas cavidades cilíndricas. Estas cavidades são conhecidas como "ressoadores". Um dos ressoadores é acoplado a uma antena que irá transmitir a energia de microondas para fora; daqui em diante, não iremos considerar essa antena. Todos os espaços internos encontram-se no vazio. Vamos considerar um magnetron típico com oito ressoadores, como mostrado na Figura 1(a). A estrutura tridimensional de um único ressoador é mostrada na Figura 1 (b). Como indicado na figura, cada uma das oito cavidades comporta-se como um circuito indutor-condensador (LC), que oscila com frequência de $f = 2.45 \text{ GHz}$.

Um campo magnético estático e uniforme é aplicado ao longo do eixo longitudinal do magnetron, apon-

tando para fora da página Figura 1(a). Além disso, uma diferença de potencial constante é aplicada entre o ânodo (potencial positivo) e o cátodo (potencial negativo). Os elétrons emitidos do cátodo alcançam o ânodo carregando-o de tal forma que excitam um modo de oscilação no qual o sinal da carga é oposto entre cada dois ressoadores adjacentes. A oscilação nas cavidades amplifica essas oscilações.

O processo acima descrito cria um campo elétrico alternado, com a frequência já referida $f = 2.45$ GHz (linhas azuis na Figura 1(a); o campo estático não está representado na figura), no espaço entre o cátodo e o ânodo, para além do campo estático causado pela tensão constante aplicada. No estado estacionário, a amplitude típica do campo elétrico alternado entre o ânodo e o cátodo é aproximadamente $\frac{1}{3}$ da amplitude do campo elétrico estático. O movimento dos elétrons no espaço entre o cátodo e o ânodo é afetado pelo campo elétrico estático e pelo campo elétrico alternado. Isso faz com que os elétrons que chegam ao ânodo transfiram cerca de 80% da energia que adquirem do campo estático para o campo alternado. Uma minoria dos elétrons ejetados retorna ao cátodo e liberta elétrons adicionais, amplificando ainda mais o campo alternado.

Cada ressoador pode ser considerado como um condensador e um indutor, veja a Figura 1(b). A capacidade resulta principalmente das partes planas da superfície do ressoador, enquanto a indutância deriva da sua parte cilíndrica. Suponha que a corrente no ressonador flui uniformemente muito perto da superfície interna da cavidade cilíndrica, e que a magnitude do campo magnético gerado por esta corrente é 0.6 vezes a de um solenóide infinito ideal. Os vários comprimentos que definem a geometria do ressoador são dados na Figura 1(b). A permissividade e permeabilidade do vazio são $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$ e $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$, respetivamente.

- A.1** Utilize os dados acima para estimar a frequência f_{est} de um único ressoador. (O seu resultado pode diferir do valor real, $f = 2.45$ GHz. Use o **valor real** no resto da pergunta.) 0.4pt

A questão A.2 abaixo não trata do magnetrão em si, mas ajuda a introduzir alguma da física relevante. Considere um elétron movendo-se no espaço livre sob a influência de um campo elétrico uniforme orientado ao longo do sentido negativo do eixo dos yy , $\vec{E} = -E_0 \hat{y}$, e um campo magnético uniforme orientado no sentido positivo do eixo dos zz , $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ (E_0 e B_0 são positivos; \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} são vetores unitários orientados da maneira convencional). Vamos representar a velocidade do elétron em função do tempo t por $\vec{u}(t)$. A velocidade de deriva \vec{u}_D do elétron é definida como a sua velocidade média. Representamos por m e $-e$ a massa e a carga do elétron, respetivamente.

- A.2** Em cada um dos dois casos seguintes, deduza \vec{u}_D . Para além disso, desenhe na Folha de Resposta a trajetória do elétron (no referencial do laboratório) durante o intervalo de tempo $0 < t < \frac{4\pi m}{eB_0}$ se:
1. para $t = 0$ a velocidade do elétron é $\vec{u}(0) = (3E_0/B_0)\hat{x}$,
 2. para $t = 0$ a velocidade do elétron é $\vec{u}(0) = -(3E_0/B_0)\hat{x}$.
- 1.5pt

Retomamos agora a nossa discussão sobre o magnetrão. A distância entre o cátodo e o ânodo é de 15mm. Suponha que, devido à perda de energia acima mencionada para os campos alternados, a energia cinética máxima de cada elétron não excede $K_{\text{max}} = 800$ eV. O módulo do campo magnético estático é $B_0 = 0.3$ T. A massa e a carga do elétron são $m = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg e $-e = -1.6 \cdot 10^{-19}$ C, respetivamente.

- A.3** Estime o valor numérico do raio máximo r da trajetória do movimento do elétron no referencial em que esse movimento é aproximadamente circular, considerando esse referencial como sendo aproximadamente inercial. 0.4pt

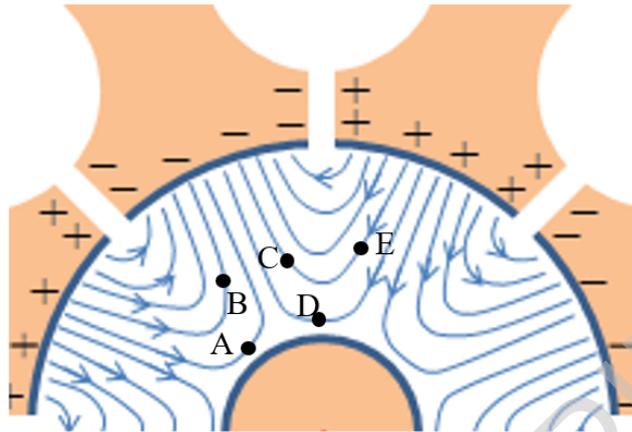


Figura 2

- A.4** A Figura 2 representa as linhas do campo elétrico alternado entre o ânodo e o cátodo, num determinado instante (o campo estático não está representado). Indique, na Folha de Resposta, quais dos eletrões posicionados em A, B, C, D e E se irão mover em direção ao ânodo, se irão mover em direção ao cátodo e se irão mover numa direção perpendicular ao raio, naquele instante. 1.2pt

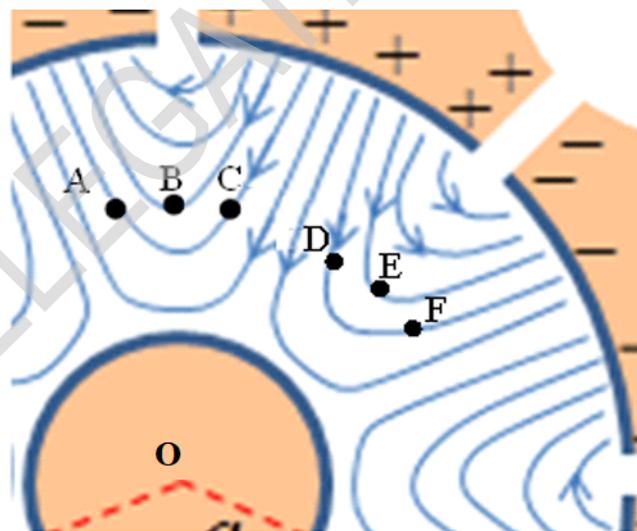


Figura 3

A figura 3 representa as linhas do campo elétrico alternado entre o ânodo e o cátodo (o campo estático não está representado), num determinado instante. As posições de seis eletrões nesse momento, são representadas por A, B, C, D, E e F. Todos os eletrões estão à mesma distância do cátodo.

- A.5** Considere a situação representada na Figura 3. Para cada um dos seis pares de elétrons AB, AC, BC, DE, DF e EF, indique, na Folha de Resposta, se o seu movimento fará o ângulo entre os seus vetores posição (medidos a partir do centro do cátodo O) aumentar ou diminuir nesse instante. 1.2pt

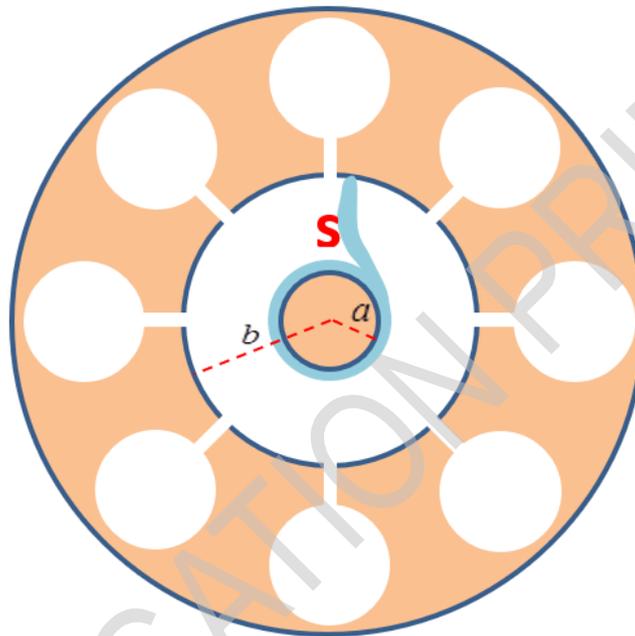


Figura 4

O padrão que descobriu na questão A.5 atua como um mecanismo de focagem, concentrando os elétrons no espaço entre o cátodo e o ânodo levando à formação de descargas em raios. A Figura 4 mostra um desses raios, representado por S.

- A.6** Represente na Folha de Resposta os outros raios naquele instante. Indique através de setas o sentido de rotação dos raios e calcule a sua velocidade angular média ω_s . 0.8pt

Faça a aproximação de que o campo elétrico total, a meia distância entre o cátodo e o ânodo, é igual ao seu valor estático médio ao longo de uma linha radial do cátodo ao ânodo, e que os raios são aproximadamente radiais nessa região. O raio do cátodo e o raio do ânodo (a e b , respetivamente) estão definidos na Figura 4.

- A.7** Deduza uma expressão aproximada para a diferença de potencial contínua V_0 necessária para operar o magnetron da forma descrita. (A expressão que encontrar dá uma aproximação para o valor mínimo requerido para o funcionamento do magnetron; a voltagem ótima é um pouco superior). 1.1pt

Parte B: Interação da radiação de microondas com moléculas da água (3.4 pontos)

Esta parte trata da utilização da radiação de microondas (irradiada pela antena magnetron para a câmara

de alimentos) para cozinhar, isto é, para aquecer um material dielétrico, como a água, pura ou salgada (que é o nosso modelo para sopa).

Um dipolo elétrico é uma configuração de duas cargas elétricas iguais e opostas q e $-q$ que se encontram a uma pequena distância d . O momento dipolar elétrico é um vetor que aponta da carga negativa para a carga positiva, de módulo $p = qd$.

Um campo elétrico variável no tempo $\vec{E}(t) = E(t)\hat{x}$ é aplicado num dipolo de momento $\vec{p}(t)$, de módulo constante $p_0 = |\vec{p}(t)|$. O ângulo entre o dipolo e o campo elétrico é $\theta(t)$.

- B.1** Escreva as expressões para o módulo do torque $\tau(t)$ aplicado pelo campo elétrico no dipolo e a potência $H_i(t)$ fornecida pelo campo ao dipolo, em termos de p_0 , $E(t)$, $\theta(t)$ e das suas derivadas. 0.5pt

Como as moléculas de água são polares, podem ser tratadas como dipolos elétricos. Devido às fortes pontes de hidrogénio entre as moléculas de água na água líquida, não se pode tratá-las como dipolos independentes. Em vez disso, deve-se considerar o vetor polarização $\vec{P}(t)$, que é a densidade do momento dipolar (momento dipolar médio por unidade de volume de um conjunto de moléculas de água). A polarização $\vec{P}(t)$ é paralela ao campo elétrico alternado aplicado localmente (da radiação de microondas), $\vec{E}(t)$, e oscila no tempo com uma amplitude que é proporcional à amplitude do campo elétrico alternado local, mas com uma diferença de fase δ .

O campo elétrico local alternado numa determinada zona dentro da água é $\vec{E}(t) = E_0 \sin(\omega t)\hat{x}$, onde $\omega = 2\pi f$, dando origem à polarização $\vec{P}(t) = \beta \varepsilon_0 E_0 \sin(\omega t - \delta)\hat{x}$, onde a constante adimensional β é uma propriedade da água.

- B.2** Obtenha uma expressão para média temporal da potência absorvida pela água por unidade de volume, $\langle H(t) \rangle$. A média temporal para uma variável periódica $f(t)$, num período T é definida como: 0.5pt

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt. \quad (1)$$

Vamos agora considerar a propagação da radiação através da água. A permitividade relativa da água (na frequência do campo eletromagnético) é ε_r , e o correspondente índice de refração da água é $n = \sqrt{\varepsilon_r}$. A densidade de energia do campo elétrico nesse instante é dada por $\frac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0 E^2$. A densidade de energia média dos campos elétricos e magnéticos é igual.

- B.3** Vamos representar a média temporal da densidade de fluxo de energia da radiação por $I(z)$ (fluxo médio de potência da radiação por unidade de área). Aqui z é a profundidade de penetração na água e a radiação propaga-se na direção do eixo dos zz . Deduza uma expressão para a dependência da densidade de fluxo $I(z)$ em z . A densidade de fluxo de energia na superfície da água, $I(0)$ pode aparecer no seu resultado. 1.1pt

A diferença de fase δ é o resultado da interação entre as moléculas de água. Depende do coeficiente adimensional de perda dielétrica ε_ℓ e da permitividade relativa ε_r (ambos dependem da frequência angular ω da radiação e da temperatura) através da relação $\tan \delta = \varepsilon_\ell/\varepsilon_r$. Quando δ é suficientemente pequeno,

o campo elétrico à profundidade de penetração z na água é dado por:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{-\frac{1}{2} n k_0 z \tan \delta} \sin(n k_0 z - \omega t) \quad (2)$$

onde $k_0 = \omega/c$ e $c = 3.0 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ é a velocidade da luz no vazio.

B.4 Utilize a aproximação $\tan \delta \approx \sin \delta$ e encontre uma expressão para o coeficiente β definido na Questão B.2 em termos dos outros parâmetros. 0.6pt

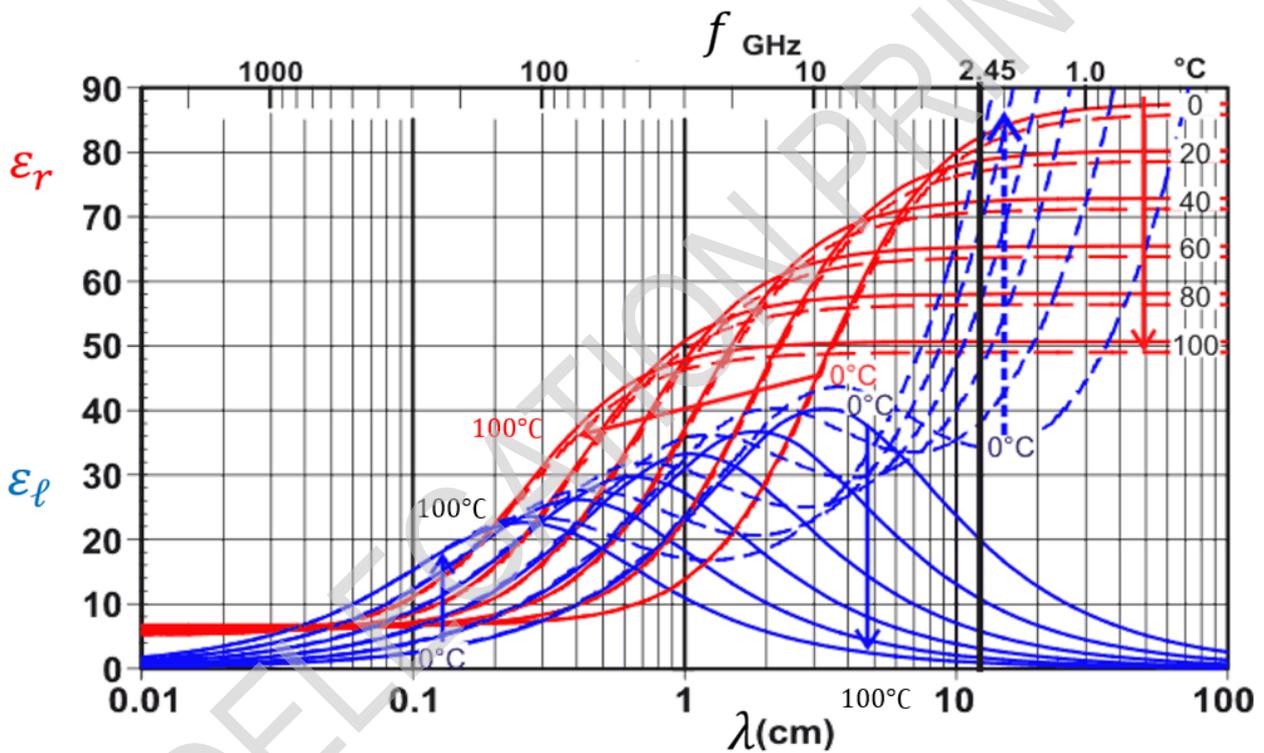


Figure 5. As setas indicam a variação com a temperatura através das curvas desde 0°C até 100°C.

A Figura 5 representa ϵ_l (a azul) e ϵ_r (a vermelho) para a água pura (linhas sólidas) e para uma solução diluída de sal em água (linhas tracejadas) como funções do comprimento de onda ou da frequência, a diferentes temperaturas. A frequência angular $\omega = 2\pi \cdot 2.45 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ está indicada com a linha vertical a negro. Abaixo, consideraremos a radiação de microondas apenas nesta frequência.



B.5 Use a Figura 5 para responder às seguintes questões:

0.7pt

1. No caso de água a 20°C , encontre o comprimento de penetração $z_{1/2}$ para o qual a potência por unidade de volume é reduzida a metade do valor que tinha a $z = 0$.
2. Indique na Folha de Respostas se o comprimento de penetração da radiação de microondas na água aumenta, diminui ou mantém-se inalterado quando a temperatura aumenta.
3. Indique na Folha de Respostas se o comprimento de penetração da radiação de microondas numa sopa (solução salina diluída) aumenta, diminui ou mantém-se inalterado quando a temperatura aumenta.

DELEGATION PRINT

Motor Termoacústico

Um motor termoacústico é uma geringonça que converte calor em potência acústica (ou ondas sonoras) - uma forma de trabalho mecânico. Como muitas outras máquinas de calor, este motor pode ser operado no sentido contrário e funcionar como um frigorífico: usando som para transportar calor de um reservatório frio para um reservatório quente. As frequências elevadas de operação reduzem a condução de calor e eliminam a necessidade para ter mais do que uma câmara no motor. Ao contrário de outros tipos de motor, um motor termoacústico não possui outras partes móveis para além do fluido.

Apesar das eficiências dos motores termoacústicos serem tipicamente mais baixas do que as eficiências de outros tipos de máquinas, eles têm vantagens nos custos de construção e de manutenção. Deste modo potenciam novas soluções para aplicação em energias renováveis como em plataformas térmico-solares ou na utilização do calor desperdiçado na indústria. Neste problema focar-nos-emos na criação de energia acústica no sistema, ignorando a extração ou conversão de energia para outros sistemas.

Parte A: Onda sonora num tubo fechado (3.7 pontos)

Considere um tubo de comprimento L e de área de secção S , alinhado na direção do eixo dos xx . Os dois terminais do tubo estão nas posições $x = 0$ e $x = L$. O tubo está fechado dos dois lados e está cheio com um gás ideal. Em equilíbrio o gás tem temperatura T_0 , pressão p_0 e densidade ρ_0 . Assuma que a viscosidade pode ser ignorada e que o movimento do gás somente se dá na direção do eixo dos xx . As propriedades do gás são uniformes nas direções y e z .



Figura 1

- A.1** Quando se forma uma onda sonora estacionária, os pequenos elementos de volume em que se pode subdividir o gás oscilam na direção x com frequência angular ω . A amplitude das oscilações de cada um desses elementos do gás depende da sua posição x de equilíbrio no tubo. Deste modo, o deslocamento longitudinal de cada elemento do gás em relação à sua posição de equilíbrio x é dado por 0.3pt

$$u(x, t) = a \sin(kx) \cos(\omega t) = u_1(x) \cos(\omega t) \quad (1)$$

(note que neste problema u descreve o deslocamento de um elemento do gás) onde $a \ll L$ é uma constante positiva, $k = 2\pi/\lambda$ é o número de onda e λ é o comprimento de onda. Qual é o comprimento de onda máximo λ_{\max} , que é possível neste sistema?

Neste problema iremos sempre assumir o modo de oscilação com $\lambda = \lambda_{\max}$.

Agora considere um elemento estreito de gás que está localizado entre x and $x + \Delta x$ ($\Delta x \ll L$) quando está em repouso. Devido à onda de deslocamentos descrita na questão A.1, este elemento do gás irá oscilar na direção x e o seu volume e outras propriedades termodinâmicas irão também oscilar.

Na resolução das questões abaixo assuma que estas flutuações das propriedades termodinâmicas são pequenas quando comparadas com os seus valores não perturbados.

- A.2** O volume $V(x, t)$ de um elemento de gás oscila em redor do seu valor de equilíbrio $V_0 = S\Delta x$ e tem a expressão 0.5pt

$$V(x, t) = V_0 + V_1(x) \cos(\omega t). \quad (2)$$

Obtenha uma expressão para $V_1(x)$ em função de V_0 , a , k e x .

- A.3** Assuma que a pressão total deste elemento de gás, devido à onda de som, pode ser escrita aproximadamente da seguinte forma 0.7pt

$$p(x, t) = p_0 - p_1(x) \cos(\omega t). \quad (3)$$

Considerando as forças que atuam no elemento de gás, calcule, em primeira ordem, a amplitude $p_1(x)$ da oscilação da pressão em função da posição x , da densidade em equilíbrio ρ_0 , da amplitude do deslocamento a e dos parâmetros da onda k e ω .

A condutividade térmica no gás pode ser desprezada nestas frequências acústicas. Deste modo, iremos tratar a expansão e contração dos elementos do gás como processos adiabáticos que satisfazem a relação $pV^\gamma = \text{const}$, onde γ é o coeficiente adiabático.

- A.4** Use a relação acima e os resultados das questões anteriores para obter, em primeira ordem, uma expressão para a velocidade $c = \omega/k$ das ondas sonoras no tubo. Escreva a sua resposta em termos de p_0 , ρ_0 e do coeficiente adiabático γ . 0.3pt

- A.5** A variação da temperatura do gás devido às expansões e contrações adiabáticas como resultado da onda sonora pode ser escrita da seguinte forma 0.7pt

$$T(x, t) = T_0 - T_1(x) \cos(\omega t). \quad (4)$$

Calcule a amplitude $T_1(x)$ das oscilações da temperatura em função de T_0 , γ , a , k e de x .

- A.6** Somente nesta alínea assume-se uma fraca interação térmica entre o tubo e o gás. Como resultado, a onda sonora estacionária fica praticamente inalterada mas o gás pode trocar uma pequena quantidade de calor com o tubo. O aquecimento devido à viscosidade pode ser desprezado. Para cada um dos pontos na Figura 2 (A e C nos terminais do tubo e B no centro) indique se a temperatura do tubo nesse ponto irá aumentar, diminuir ou manter-se constante num intervalo de tempo suficientemente longo. 1.2pt

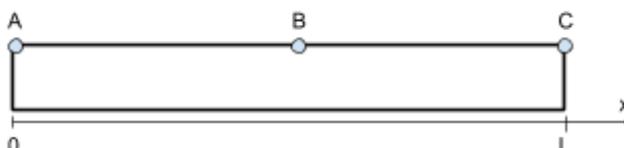


Figura 2

Parte B: Amplificação de ondas sonoras induzida por contacto térmico exterior (6.3 pontos)

Uma conjunto de placas sólidas finas bem espaçadas é colocada em pilha dentro do tubo. As placas nesta pilha são alinhadas paralelamente ao eixo do tubo, de modo a não obstruir o fluxo de gás ao longo deste. O centro da pilha é posicionado em $x_0 = L/4$ e tem uma largura $\ell \ll L$ ao longo do eixo do tubo, preenchendo toda a secção transversal. Os extremos direito e esquerda da pilha são mantidos a uma diferença de temperatura τ . O extremo esquerda da pilha, em $x_H = x_0 - \ell/2$, é mantido à temperatura $T_H = T_0 + \tau/2$ por um reservatório térmico externo e, ao mesmo tempo, o seu extremo direito, em $x_C = x_0 + \ell/2$, é mantido a uma temperatura $T_C = T_0 - \tau/2$.

A pilha de placas permite um pequeno fluxo de calor na direção longitudinal, mantendo um gradiente de temperatura constante entre os seus extremos, de modo que $T_{\text{plate}}(x) = T_0 - \frac{x-x_0}{\ell}\tau$.

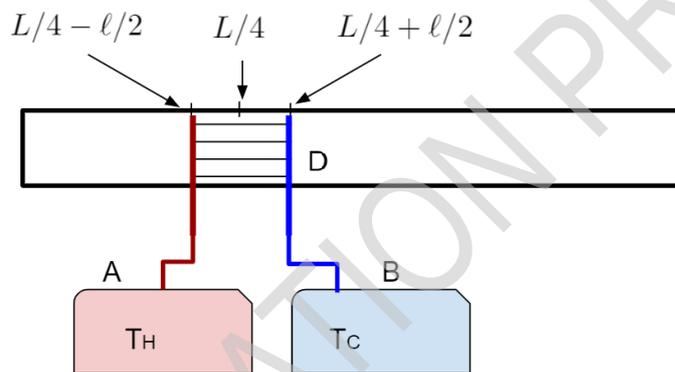


Figura 3. Esboço do sistema. (A) e (B) representam os reservatórios de calor quente e frio, respetivamente. (D) representa a pilha de placas.

Para analisar o efeito térmico do contacto entre a pilha de placas e o gás nas ondas sonoras do tubo, considere as seguintes suposições:

- Como na parte anterior, todas as flutuações de propriedades termodinâmicas são pequenas quando comparadas aos seus valores não perturbados.
- O sistema funciona no modo de onda estacionária fundamental com o maior comprimento de onda possível. Este modo é apenas ligeiramente modificado pela presença da pilha de placas.
- A pilha é muito mais curta do que o comprimento de onda $\ell \ll \lambda_{\text{max}}$, e pode ser posicionada suficientemente longe dos nodos do deslocamento e da pressão, de modo a que o deslocamento $u(x, t) \approx u(x_0, t)$ e a pressão $p(x, t) \approx p(x_0, t)$ possam ser considerados uniformes ao longo de todo o comprimento da pilha.
- Podemos negligenciar quaisquer efeitos de borda causados pelos elementos do volume de gás que entram e saem da pilha.
- A diferença de temperatura entre as extremidades da pilha de placas, isto é, entre os reservatórios quente e frio, é pequena quando comparada com a temperatura absoluta: $\tau \ll T_0$.
- A condução de calor através da pilha, através do gás e ao longo do tubo é desprezável. As únicas fontes significativas de transferência de calor são a convecção, devido ao movimento do gás, e a condução entre o gás e a pilha.

- B.1** Considere um elemento específico de volume de gás na região da pilha, inicialmente em $x_0 = L/4$. À medida que este elemento se move dentro da pilha, a temperatura local que ele sente por estar em contacto a pilha muda da seguinte forma:

$$T_{\text{env}}(t) = T_0 - T_{\text{st}} \cos(\omega t). \quad (5)$$

Escreva T_{st} em função de a , τ e ℓ .

- B.2** Acima de que diferença de temperatura crítica τ_{cr} o gás irá transportar calor do reservatório quente para o frio? Escreva τ_{cr} em função de T_0 , γ , k e ℓ .

- B.3** Obtenha a expressão geral aproximada para o fluxo de calor $\frac{dQ}{dt}$, de um pequeno volume de um gás, como uma função linear de suas taxas de variação de volume e de pressão. Escreva a sua resposta em função da taxa de variação de volume $\frac{dV}{dt}$, da taxa de variação de pressão $\frac{dp}{dt}$, dos valores de equilíbrio não perturbados da pressão e do volume do elemento p_0 , V_0 e do coeficiente adiabático γ . (Pode usar a expressão para a capacidade de térmica molar a volume constante $c_v = \frac{R}{\gamma-1}$, onde R é a constante dos gases).

A pequena taxa de fluxo de calor entre o elemento do volume do gás e a pilha de placas causa uma diferença de fase entre as oscilações de pressão e de volume do elemento. Vamos ver como este facto leva à realização de trabalho.

Seja o fluxo de calor da pilha para o elemento de gás dentro da pilha proporcional à diferença de temperatura entre o elemento de gás e a zona da pilha vizinha ao elemento, dado aproximadamente por $\frac{dQ}{dt} = -\beta V_0 (T_{\text{st}} - T_1) \cos(\omega t)$. Aqui T_1 e T_{st} são as amplitudes de oscilação de temperatura do elemento de gás e da zona da pilha vizinha ao elemento, como foi obtido nas questões A.5 e B.1, respetivamente, e $\beta > 0$ é uma constante. Suponha que nas frequências de funcionamento da máquina, a mudança na temperatura do gás como resultado desse fluxo de calor seja insignificante em comparação com T_1 e com T_{st} .

- B.4** Para calcular o trabalho, consideraremos a mudança no volume do elemento de gás que se move como resultado do contato térmico com a pilha. Vamos escrever a pressão e o volume do elemento de gás sob a influência da pilha na forma:

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p_a \sin(\omega t) - p_b \cos(\omega t), \\ V &= V_0 + V_a \sin(\omega t) + V_b \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (6)$$

Dados p_a e p_b , determine os coeficientes V_a e V_b . Escreva a sua resposta em função de p_a , p_b , p_0 , V_0 , γ , τ , τ_{cr} , β , ω , a e ℓ .

- B.5** Obtenha uma expressão aproximada para o trabalho acústico por unidade de volume w produzido pelo elemento de gás ao longo de um ciclo. Integre sobre o volume da pilha para obter o trabalho total W_{tot} realizado pelo gás durante um ciclo. Escreva W_{tot} em função de γ , τ , τ_{cr} , β , ω , a , k e S .



B.6 Obtenha uma expressão aproximada para o calor Q_{tot} transportado do lado esquerdo do plano $x = x_0$ para a direita, ao longo de um ciclo. Escreva a sua resposta em função de τ , τ_{cr} , β , ω , a , S e ℓ . (Pista: pode usar a fórmula $j = Q \frac{du}{dt}$ para a corrente de calor devida à convecção). 0.8pt

B.7 Obtenha a eficiência η do motor termoacústico. A eficiência é definida como a razão entre o trabalho acústico realizado e o calor extraído do reservatório quente. Escreva sua resposta em função da diferença de temperatura τ entre o reservatório quente e o frio, da diferença de temperatura crítica τ_{cr} e da eficiência de Carnot $\eta_c = 1 - T_C/T_H$. 0.6pt

DELEGATION PRINTER