

## 1. Planeta-disco

(a) Fazendo as correspondências

$$q \rightarrow m$$
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow -G$$
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \rightarrow -G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Se, por um lado, para o campo eléctrico, se tem

$$\Phi_e = \frac{q}{\epsilon_0}$$

a forma da Lei de Gauss para o campo gravítico é

$$\Phi_g = -4\pi G m .$$

(b) Usando uma superfície gaussiana que contenha as duas superfícies do planeta (ver figura mais à frente, esquema 1))

$$\Phi_g = 2g(z)A$$

em que  $g(z)$  é a componente  $z$  da aceleração da gravidade à altitude  $z$  e  $A$  é a área da base da superfície gaussiana (superfície cilíndrica, por exemplo). Como a massa no interior da superfície gaussiana é

$$\Delta m = \mu A$$

vem

$$2g(z)A = -4\pi G\mu A \quad \text{ou} \quad g(z) = -2\pi G\mu$$

de onde resulta

$$g(z) = -g_{Dw} = -2\pi G\mu .$$

O campo é uniforme e não varia com a distância à superfície (desde que a aproximação de planeta “sem espessura” seja razoável).

(c) Se o planeta tiver massa volúmica  $\rho$ , então  $\mu = \rho d$ , em que  $d$  é a espessura do planeta. Como

$$g_{Dw} = 2\pi G\rho_{Dw} d ,$$

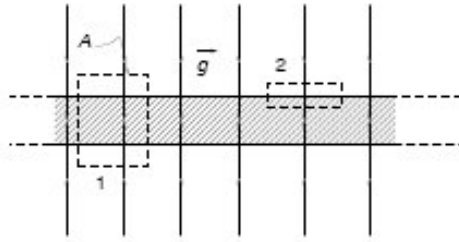
e sendo  $g_{Dw} = g$  e  $\rho_{Dw} = \rho_T = \rho$ ,

$$g = 2\pi G\rho d .$$

Por outro lado, à superfície da Terra,  $g = \frac{GM_T}{R_T^2} = \frac{4}{3}\pi R_T G\rho$ . Inserindo na expressão

acima,

$$d = \frac{2}{3}R_T = 4,3 \times 10^6 \text{ m} .$$



(d) Usando novamente uma superfície de Gauss com uma base fora do planeta, onde o campo é  $-g_{Dw}$  e a outra dentro e à distância  $z$  do plano central (figura acima, esquema 2), onde o campo é  $-g(z)$ , vem

$$\Phi = -g_{Dw}A - g(z)A.$$

A massa contida no interior da superfície de Gauss é  $\Delta m = A\rho(d/2 - z)$  pelo que o fluxo de campo gravítico também é dado por

$$\Phi = -4\pi GA\rho\left(\frac{d}{2} - z\right).$$

Igualando agora as duas expressões obtidas para o fluxo, vem (notar que  $g_{Dw} = 2\pi G\rho d$ )

$$g_{Dw} + g(z) = 4\pi G\rho\left(\frac{d}{2} - z\right) = g_{Dw}\left(1 - \frac{2z}{d}\right)$$

e, finalmente,

$$g(z) = -g_{Dw} \frac{2z}{d}$$

(e) Como mostra a última expressão, a aceleração gravítica é proporcional à distância ao plano central, ou seja pode escrever-se na forma

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\omega^2 z.$$

O movimento de uma partícula largada da superfície do planeta para dentro do poço é harmónico simples com frequência angular

$$\omega = \sqrt{\frac{2g_{Dw}}{d}}.$$

O período é, pois,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{d}{2g_{Dw}}}$$

Usando a expressão  $d = \frac{2}{3}R_T$  e substituindo valores, encontra-se

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R_T}{3g_{Dw}}} = 48,9 \text{ minutos}$$

## 2. Disco de Faraday

(a) Na ausência de corrente a velocidade dos electrões é igual à velocidade de cada ponto do cilindro:

$$\vec{v} = \omega r \hat{e}_\theta$$

Como  $\vec{B} = B \hat{e}_z$  a força magnética sobre os electrões é dada por

$$\vec{F}_m = -e\vec{v} \times \vec{B} = -e\omega r B \hat{e}_r$$

ou seja

$$\boxed{\vec{F}_m = -eB\omega r \hat{e}_r.}$$

(b) Para que a força electromagnética  $\vec{F}_{em} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  seja nula surge um campo eléctrico induzido tal que

$$\vec{E} = -B\omega r \hat{e}_r.$$

Este campo depende da distância ao eixo de rotação,  $E(r) = -B\omega r$ . O campo eléctrico aponta do exterior para o interior. Logo, a periferia do cilindro fica a um potencial maior do que o seu centro. A diferença de potencial entre qualquer ponto da periferia do cilindro (P) e o centro (C) é

$$V_P - V_C = \Delta V = \frac{1}{2} \omega B a^2.$$

Designando a secção recta do cilindro por  $A$ , tem-se  $A = \pi a^2$  e a equação acima pode escrever-se  $\Delta V = \frac{\omega}{2\pi} BA$ . Por um lado,  $\frac{\omega}{2\pi} = T^{-1}$  é o inverso do período de rotação; por outro lado,  $BA = \phi$  é o fluxo do campo magnético através da secção recta do cilindro. Portanto,

$$\boxed{\Delta V = \frac{\phi}{T}}$$

(c) Se o gerador de Faraday estiver ligado a uma resistência externa,  $R$ , a corrente que passa na resistência é

$$i = \frac{\Delta V}{R}$$

e a potência dissipada por efeito Joule é

$$P = \frac{(\Delta V)^2}{R} = \frac{\omega^2 \phi^2}{4\pi^2 R}$$

Como a energia se conserva, esta potência dissipada corresponde à variação da energia cinética do cilindro por unidade de tempo. A energia cinética do cilindro é

$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2$$

sendo  $I = \frac{1}{2}ma^2$  o momento de inércia do cilindro de massa  $m$ . A conservação de energia permite escrever

$$\frac{dE_c}{dt} = -\frac{\omega^2 \phi^2}{4\pi^2 R} = -\frac{\phi^2}{2\pi^2 IR} E_c$$

e, finalmente,

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = -\frac{E_c}{\tau}}, \quad \text{com } \tau = \frac{2\pi^2 IR}{\phi^2} \quad \text{ou ainda} \quad \boxed{\tau = \frac{mR}{B^2 a^2}}.$$

(d) Para  $B = 1 \text{ T}$ , e  $A = \pi a^2 = 4\pi \times 10^{-4} \text{ m}^2$ , vem  $\phi = 4\pi \times 10^{-4} \text{ Wb}$ . Por outro lado,  $I = ma^2/2 = 1 \times 4 \times 10^4 / 2 = 2 \times 10^4 \text{ kg m}^2$  e  $R = 10 \text{ } \Omega$ . Portanto,

$$\tau = \frac{4\pi^2 \times 10^{-3}}{16\pi^2 \times 10^{-8}} = 25000 \text{ s} \approx 6,9 \text{ horas.}$$

Sendo este o valor da constante de tempo, o cilindro, para parar ao fim de 10 minutos, terá de existir um outro mecanismo de dissipação de energia.

### 3. Datação por carbono-14

A lei do declínio radioactivo escreve-se

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

Por definição, para  $t = T_{1/2}$  (tempo de meia-vida) tem-se  $N = N_0 / 2$ :

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}.$$

Tomando logaritmos,  $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(e^{-\lambda T_{1/2}})$  que é equivalente a

$$\ln(1) - \ln(2) = -\lambda T_{1/2}$$

e, finalmente,

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

A constante de decaimento é  $\lambda = \ln 2 / T_{1/2} = \ln 2 / 5700 \text{ anos}^{-1}$ :

$$\lambda = 1,216 \times 10^{-4} \text{ anos}^{-1}.$$

**(b)** Admitindo que o fóssil tinha, quando morreu, o mesmo teor de carbono-14 que o ser vivo actual, podemos escrever

$$N_{\text{fóssil}}(t) = N_{\text{ser vivo}} e^{-\lambda t}$$

No caso em análise,  $N_{\text{fóssil}} / N_{\text{ser vivo}} = 0,1$  e portanto  $0,1 = e^{-\lambda t}$  ou

$$t = -\frac{\ln(0,1)}{\lambda} = -\frac{\ln(0,1)}{1,216 \times 10^{-4}}$$

e

$$t = 1,89 \times 10^4 \text{ anos.}$$

**(c)** Escrevemos agora  $e^{-\lambda t} = \frac{0,0006 \times N_{\text{ser vivo}}}{N_{\text{ser vivo}}}$ , donde

$$t = -\frac{\ln(0,0006)}{\lambda} = -\frac{\ln(0,0006)}{1,216 \times 10^{-4}}$$

e

$$t \approx 61\,000 \text{ anos.}$$

**(d)** A actividade é  $R = -\frac{dN}{dt} = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$  ou  $R = R_0 e^{-\lambda t}$  com  $R_0 = \lambda N_0$  (e  $R = \lambda N$ ).

Para  $N = 10^{15}$  e  $\lambda = 3,856 \times 10^{-12}$  vem

$$R = 3856 \text{ desintegrações/segundo}$$



#### 4. Arrefecimento de átomos

a) De

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T$$

obtém-se

$$v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

e, substituindo valores (a massa do átomo de sódio é  $m = 3,819 \times 10^{-26}$  kg), vem

$$v = 570 \text{ m/s.}$$

(Nota: considerou-se a velocidade média igual à velocidade quadrática média.)

b)



A conservação do momento linear segundo a direcção do movimento permite escrever:

$$\vec{p}_{\text{final átomo}} = \vec{p}_{\text{fóton}} + \vec{p}_{\text{inicial átomo}}$$

ou ainda  $\Delta \vec{p}_{\text{átomo}} = \vec{p}_{\text{fóton}}$ . Segundo o eixo  $Ox$ ,  $\Delta p_{\text{átomo}} = -h/\lambda = -E_{\text{fóton}}/c$  pelo que a variação da velocidade do átomo é

$$\Delta v = -\frac{E_{\text{fóton}}}{mc}$$

De acordo com a aproximação sugerida no enunciado,  $E_{\text{fóton}} \approx E_{\text{transição}} = E_{\text{exc}} - E_{\text{fund}} = -3,04 + 5,14 = 2,10 \text{ eV} = 3,36 \times 10^{-19} \text{ J}$ . A variação de velocidade em cada colisão frontal,  $\Delta v = -E_{\text{fóton}}/mc$ , é, substituindo valores,

$$\Delta v = -2,93 \times 10^{-2} \text{ m/s}$$

Seriam necessárias  $570/(2,93 \times 10^{-2}) = 1,94 \times 10^4$  colisões.

c) Vamos considerar todas as grandezas vectoriais projectadas na direcção  $Ox$ .

(c.1) A energia cinética final do átomo é

$$E_{c \text{ final}} = \frac{1}{2}m(|v_i| - |\Delta v|)^2 = \frac{1}{2}m(|v_i|^2 - 2v_i|\Delta v| + |\Delta v|^2) = E_{c \text{ inicial}} + \frac{1}{2}m(-2v_i|\Delta v| + |\Delta v|^2)$$

e, portanto,

$$\Delta E_c = -m|v_i||\Delta v| + \frac{1}{2}m|\Delta v|^2$$

(c.2) Desprezando o segundo termo na expressão anterior  $\Delta E_c \approx -m|v_i||\Delta v|$  e usando o resultado da alínea (b),  $\Delta v = -\frac{E_{\text{fotão}}}{mc}$ , encontra-se

$$\frac{\Delta E_c}{E_{\text{fotão}}} \approx -\frac{|v_i|}{c} = -1,9 \times 10^{-6}.$$

(d.1)



A conservação de momento linear permite concluir que a variação de velocidade do átomo é, tal como encontrámos na alínea (b),  $\Delta v = -\frac{E_{\text{fotão}}}{mc}$ . Esta é, pois, a velocidade final do átomo depois de absorver o fóton. A variação de energia cinética do átomo é, portanto,

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} \frac{E_{\text{fotão}}^2}{m c^2}$$

Esta energia tem de ser fornecida pelo fóton, logo  $E_{\text{fotão}} = E_{\text{transição}} + \Delta E_c$

$$E_{\text{fotão}} = E_{\text{transição}} + \frac{1}{2} \frac{E_{\text{fotão}}^2}{m c^2} \quad \text{de onde se conclui que} \quad E_{\text{fotão}} > E_{\text{transição}}$$

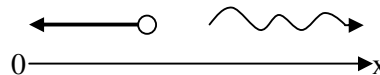
(d.2) Como  $\frac{E_{\text{fotão}}^2}{m c^2} \approx \frac{E_{\text{transição}}^2}{m c^2} = 3,28 \times 10^{-29}$  J, a variação de energia cinética do átomo é

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} \frac{E_{\text{transição}}^2}{m c^2}, \text{ ou seja}$$

$$\Delta E_c = 1,64 \times 10^{-29} \text{ J.}$$

(d.3) Na emissão do fóton, tal como na absorção há conservação do momento linear.

$$\vec{p}_{\text{inicial átomo}} = \vec{p}_{\text{final átomo}} + \vec{p}_{\text{fotão}}$$



$$m \vec{v}_i = m \vec{v}_f + \vec{p}_{\text{fotão}}$$

A velocidade inicial do átomo aponta agora no sentido negativo de  $0x$ . Vimos em (d.1) que esta velocidade inicial é  $-\frac{E_{\text{fotão}}}{mc}$ . Como o fóton é emitido no sentido positivo, podemos escrever



$$mv_f + \frac{E'_{\text{fotão}}}{c} = -\frac{E_{\text{fotão}}}{c}$$

onde  $E'_{\text{fotão}}$  é a energia do fóton emitido ( $E_{\text{fotão}}$  é a energia do fóton absorvido). Portanto,

$$v_f = -\frac{E_{\text{fotão}} + E'_{\text{fotão}}}{mc}$$

A variação da energia cinética do átomo é

$$\Delta E'_c = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}m \left[ \left( -\frac{E_{\text{fotão}} + E'_{\text{fotão}}}{mc} \right)^2 - \left( -\frac{E_{\text{fotão}}}{mc} \right)^2 \right]$$

ou ainda

$$\Delta E'_c = \frac{1}{2} \left( \frac{2E_{\text{fotão}}E'_{\text{fotão}}}{mc^2} + \frac{E'^2_{\text{fotão}}}{mc^2} \right)$$

e, finalmente, na aproximação sugerida,

$$\Delta E'_c = \frac{3}{2} \frac{E^2_{\text{transição}}}{mc^2}$$

Esta variação de energia cinética na emissão é o triplo da encontrada na alínea (d.2):

$$\Delta E'_c = 4,92 \times 10^{-29} \text{ J.}$$

**(d.4)** Devido ao processo de absorção e emissão consecutiva, o átomo, inicialmente em repouso, adquire uma energia cinética  $E_c = \Delta E_c + \Delta E'_c = 4,92 \times 10^{-29} + 1,64 \times 10^{-29}$  ou

$$E_c = 6,56 \times 10^{-29} \text{ J}$$

A temperatura correspondente é  $T = \frac{2E_c}{3k_B}$ , ou seja

$$T = 3 \mu\text{K} .$$

Este valor é muito pequeno (ordem dos microkelvins) pelo que o processo pode ser desprezado no arrefecimento. Só tem importância próximo do zero absoluto (não sendo possível atingi-lo).