

XI Olimpíada Ibero-Americana de Física - OIBF 2006
Coimbra, Portugal, 23-30 de Setembro de 2006

PROVA TEÓRICA

INSTRUÇÕES:

- 1 - O tempo disponível é de 5 h.
- 2 - Escreva claramente o seu nome e país na respectiva folha. **NÃO se identifique de qualquer forma nas restantes folhas da prova.** Escreva também o número de folhas que utilizou na resolução da prova, incluindo aquela em que se identifica.
- 3 - Tem à sua disposição dois tipos de folhas: folhas brancas com logótipo, que são as folhas de resposta onde só pode escrever no lado com o logótipo; e folhas de rascunho (em papel reciclado) que são para entregar mas que **NÃO** serão corrigidas.
- 4 – Identifique claramente o problema e a alínea a que está a responder.
- 5 – Sempre que começar a responder a um novo problema, utilize uma **NOVA** folha de resposta. **NUNCA** misture numa mesma folha respostas a problemas diferentes. Por exemplo, **NÃO** comece a responder ao problema 3 na folha onde já tenha respondido ao problema 2.
- 6 - Quando terminar, organize e numere todas as folhas de maneira lógica (no canto superior direito), e coloque-as no envelope juntamente com o enunciado e as folhas de rascunho. Se, por exemplo, tiver escrito **12** páginas (incluindo a que tem a sua identificação), a **3ª** página deve ser a **3 / 12**.
- 7 - Não é permitido levar consigo qualquer papel nem qualquer outro material que esteja no posto de trabalho.

1. Planeta-disco (8 pontos)

Os livros da série *Discworld* de Terry Pratchett passam-se num planeta com a forma invulgar/curiosa de um disco plano.

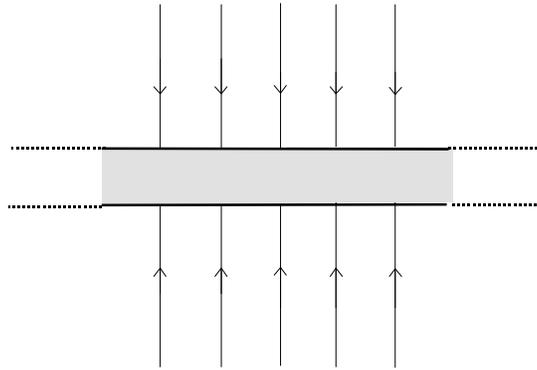


Figura 1: Um planeta em forma de disco plano.

Crê-se que o planeta está suportado em quatro grandes elefantes que viajam no espaço sobre uma enorme tartaruga, mas esses detalhes não são relevantes.

Interessa-nos aqui explorar aspectos do campo gravítico/gravitacional/gravitacional de um planeta plano, usando as semelhanças entre a lei da gravitação universal e a lei de Coulomb:

$$\vec{F}_g = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{e}_r \quad (\text{gravitação})$$

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{e}_r \quad (\text{Coulomb})$$

(Dado: raio da Terra, $R_T = 6,4 \times 10^6$ m)

(a) Segundo a Lei de Gauss, o fluxo do campo eléctrico/elétrico através de uma superfície fechada é dado por

$$\Phi_e = \frac{q}{\epsilon_0}$$

onde q é a carga no interior da superfície.

Escreva a forma correspondente da Lei de Gauss para o campo gravítico/gravitacional.

(b) Usando a Lei de Gauss, determine o valor do campo gravítico/gravitacional no exterior de um planeta com a forma de disco, num ponto próximo da superfície e afastado das bordas. A espessura do disco é muito menor do que o seu raio e pode ser desprezada. Considere que μ é a densidade superficial de massa do planeta (massa por unidade de área).

(c) Nesta parte vai considerar que *Discworld* é um planeta com espessura, com uma massa volúmica (ou densidade) igual à da Terra, ρ_T , e uma aceleração da gravidade à sua superfície, g_D , igual à da Terra, g . Encontre a relação entre a espessura de *Discworld* e o raio da Terra.

(d) Há um buraco que atravessa toda a espessura de *Discworld*. Supondo que o interior do planeta tem massa volúmica (ou densidade) uniforme, use a Lei de Gauss para mostrar que o campo gravítico/gravitacional num buraco perpendicular à superfície tem a forma $\vec{g} = g(z)\hat{e}_z$, com

$$g(z) = -\frac{2g_D}{d}z,$$

em que z é a coordenada vertical com origem no plano médio do planeta e g_D é o módulo da aceleração da gravidade à superfície.

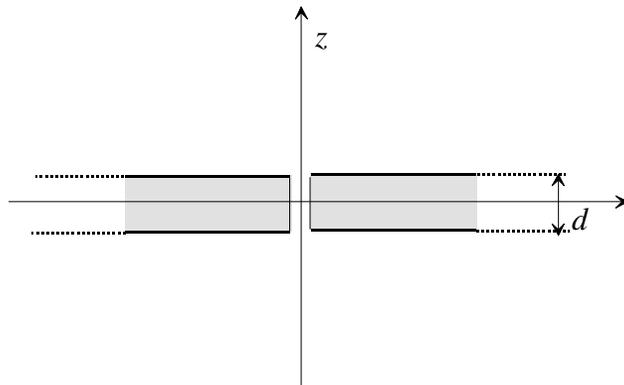


Figura 2: Um buraco que atravessa toda a espessura do *Discworld*.

(e) Mostre que um objecto/objeto qualquer que se deixa cair da borda do poço vai oscilar harmonicamente e determine o período do movimento.

2. Disco de Faraday (8 pontos)

Um disco metálico (massa m , raio a) está colocado numa região onde existe um campo magnético uniforme, \vec{B} , dirigido segundo o eixo do disco. Se o disco for colocado a girar em torno do eixo com velocidade angular $\vec{\omega}$, estabelece-se uma diferença de potencial, ΔV , entre a borda do disco e o eixo de rotação.

(a) Determine a força magnética, \vec{F}_m , sobre as cargas livres do metal.

(b) Quando se alcança o regime estacionário, a resultante das forças eléctrica/eléctrica e magnética sobre as cargas livres do metal deve ser nula. Se a velocidade angular $\vec{\omega}$ e o campo magnético \vec{B} tiverem o mesmo sentido, como mostra a figura, mostre que a diferença de potencial, ΔV , é dada pela expressão

$$\Delta V = \frac{\phi}{T}$$

em que ϕ é o fluxo do campo magnético através do disco e T o período de rotação.

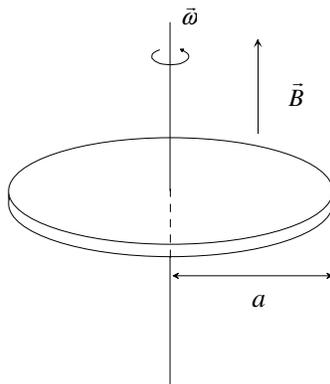


Figura 1: Disco metálico em rotação num campo magnético uniforme.

(c) Imagine que é ligada uma resistência exterior R entre o eixo e a borda do disco, de modo a permitir passagem de corrente. A diferença de potencial e a velocidade angular diminuem com o tempo, mas, em cada instante, ΔV é a mesma que existiria com o circuito aberto, para essa velocidade angular. Fazendo um balanço de energia, mostre que a energia cinética de rotação do disco, E_c , diminui com o tempo, por efeito Joule, de acordo com a equação

$$\frac{dE_c}{dt} = -\frac{E_c}{\tau}$$

onde τ é um tempo característico. Exprima τ em função dos parâmetros conhecidos.

(d) Os resultados obtidos para discos são válidos para cilindros. Comprovou-se experimentalmente que um cilindro de cobre de massa $m = 1$ kg e raio $a = 2$ cm, colocado num campo $B = 1$ T, e com uma resistência de 10Ω entre o eixo e a borda, parou cerca de 10 minutos depois de começar a girar. Pode-se explicar esta observação experimental considerando apenas a dissipação de energia por efeito Joule na resistência? Justifique a sua resposta.

3. Precisão da datação por carbono 14 (6 pontos)

Um isótopo diz-se radioactivo/radioativo quando, por exemplo, por emissão (ou captura) de alguma partícula, pode transformar-se noutra. Nestes tipos de transformação, ou decaimento, a taxa de desintegração, i.e., o número de átomos que sofrem o processo, por unidade de tempo, é proporcional ao número de átomos existentes, N . Matematicamente, isto é descrito por

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N,$$

onde λ é uma constante característica de cada processo, que se designa por *constante de decaimento* (ou *constante de desintegração*).

Em resultado do constante bombardeamento da parte superior da atmosfera por raios cósmicos, o azoto 14 pode transformar-se em carbono 14 segundo a reacção/reacção ${}^{14}_7\text{N} + n \rightarrow {}^{14}_6\text{C} + p$. Por sua vez, o carbono 14 é radioactivo/radioativo, com um tempo de meia-vida de 5700 anos, e decai para azoto 14 segundo a reacção/reacção



($\bar{\nu}$ representa um antineutrino).

O carbono 14 mistura-se com os outros isótopos de carbono existentes na natureza, tal como o carbono 12, fazendo com eles parte dos compostos orgânicos. A percentagem deste isótopo de carbono nos seres vivos é praticamente constante ao longo da sua vida. Quando o ser vivo morre, deixa de haver trocas de carbono com o exterior e o teor em carbono 14 vai baixando devido ao seu decaimento radioactivo/radioativo, ao passo que a quantidade de carbono 12 permanece constante. Desta forma, é possível efectuar/efetuar a datação de uma amostra através da medição da radioactividade/radioatividade presente.

(a) Relacione o tempo de meia-vida de uma amostra radioactiva/radioativa (tempo que decorre até que o número de núcleos radioactivos/radioativos se reduz para metade) com a constante de decaimento e calcule o valor desta para o carbono 14.

(b) Determine a idade de uma amostra que contém 10% do carbono 14 existente num ser vivo.

(c) Tendo em atenção que actualmente/atualmente se consegue detectar/detetar uma percentagem mínima de 0,06% do carbono 14 existente numa amostra, estime qual é a idade máxima que se consegue determinar com esta técnica de datação.

(d) A actividade/atividade é o número de desintegrações por unidade de tempo. Qual é a actividade/atividade de uma amostra de carbono onde existam 10^{15} átomos de carbono 14.

4. Arrefecimento/resfriamento de átomos (8 pontos)

O prémio/prémio Nobel em Física foi atribuído, em 1997, a Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji e William D. Phillips pela sua contribuição no desenvolvimento de métodos para arrefecer/resfriar e aprisionar átomos. Eric A. Cornell, Wolfgang Ketterle e Carl E. Wieman utilizaram estes métodos para obter a condensação (o condensado) de Bose-Einstein em gases diluídos de átomos alcalinos, tendo por isso recebido o prémio/prémio Nobel em Física em 2001. A base desses métodos é a técnica que se designa por “*laser cooling*”, na qual se utiliza a colisão entre fotões/fótons (provenientes de um laser) e os átomos do gás que se pretende arrefecer/resfriar. O laser emite fotões/fótons com uma energia tal que um fotão/fóton pode ser absorvido quando colide com um átomo do gás.

Pretende-se arrefecer/resfriar um gás de átomos de sódio ($M = 23 \text{ g/mol}$) que se encontra à temperatura 300 K com um laser que emite fotões/fótons com uma energia tal que um átomo de sódio, ao absorver um fotão/fóton, transita/salta do estado fundamental ($E_{\text{fund}} = -5,14 \text{ eV}$) para o primeiro estado excitado ($E_{\text{exc}} = -3,04 \text{ eV}$).

Pode considerar que a temperatura do gás, T , se relaciona com a energia cinética média, E_c , dos átomos de sódio através da expressão

$$E_c = \frac{3}{2} k_B T,$$

onde k_B é a constante de Boltzmann.

Dados: $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$; $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$; $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J s}$; $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$.
 $1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}$.

Considere que os átomos são não-relativistas/relativísticos.

(a) Qual é a velocidade média de um átomo de sódio num gás a 300 K?

(b) Obtenha uma expressão para a variação da velocidade de um átomo de sódio quando colide frontalmente com um fotão/fóton do referido laser. Calcule o valor numérico para

essa variação, considerando que a energia do fóton/fóton absorvido é *exactamente/exatamente igual* à energia da transição. Quantas colisões deste tipo seriam necessárias para parar um átomo de sódio?

(c) Na realidade, como a variação da energia cinética do átomo não é nula, a energia do fóton/fóton *não é exactamente/exatamente igual* à energia da transição.

(c.1) Mostre que a variação de energia cinética do átomo associada à absorção do fóton/fóton numa colisão frontal se pode escrever

$$\Delta E_c = -m|v_i||\Delta v| + \frac{1}{2}m|\Delta v|^2,$$

onde as grandezas $|v_i|$ e $|\Delta v|$ se referem aos módulos dos vectores/vetores *velocidade inicial* e *variação da velocidade do átomo*, respectivamente.

(c.2) Calcule a razão $\Delta E_c / E_{\text{fóton}}$ para os átomos, usando a velocidade obtida em (a), considerando que, neste caso, a primeira parcela da expressão acima para ΔE_c é a dominante (ou seja, a segunda parcela do segundo membro dessa expressão pode ser desprezada) e que se pode usar para a variação de velocidade do átomo o resultado encontrado na alínea (b).

(d) A temperatura final atingida num arrefecimento/resfriamento deste tipo é limitada inferiormente por aquilo que se designa o limite de recuo (*recoil limit*) associado ao recuo dos átomos na emissão e absorção.

(d.1) Obtenha uma expressão para a variação de energia cinética de um átomo com velocidade inicial nula que absorve um fóton/fóton e mostre que, neste caso, a energia do fóton/fóton tem que ser superior à energia da transição atômica/atômica.

(d.2) Calcule a variação de energia cinética da alínea anterior, sabendo que $E_{\text{fóton}}^2 / mc^2$ pode ser aproximado por $E_{\text{transição}}^2 / mc^2$, onde m representa a massa do átomo de sódio e $E_{\text{fóton}}$ a energia do fóton/fóton absorvido.

(d.3) Considere que o átomo que absorveu um fóton/fóton nas condições da alínea anterior, ficando no estado excitado, emite um fóton/fóton na mesma direcção/direção e sentido oposto ao da sua velocidade. Calcule a variação de energia cinética do átomo. Também

neste caso pode usar a aproximação $E'_{\text{fotão}} / mc^2 \approx E_{\text{transição}}^2 / mc^2$ em que $E'_{\text{fotão}}$ é a energia do fóton/fóton emitido.

(d.4) Considerando este processo de absorção e emissão calcule o ganho de energia final do átomo e a temperatura a que corresponde. Qual é a importância do processo no arrefecimento/resfriamento de átomos?