XI Olimpíada Ibero-Americana de Física - OIBF 2006

Coimbra, Portugal, 23-30 de Septiembre de 2006

PRUEBA TEÓRICA

INSTRUCCIONES:

1 - El tiempo disponible es de 5 h.

2 - Escriba claramente su nombre (nombre y apellido) y país en la hoja correspondiente. **No se identifique de ninguna otra manera en las restantes hojas de la prueba.** Escriba también el número de hojas que utilizó en la resolución de la prueba, incluyendo la que contiene su identificación.

3 -Tiene a su disposición dos tipos de hojas: hojas blancas con logotipo, que son las hojas de respuesta y en las que sólo puede escribir en la cara con el logotipo; y hojas de sucio (de papel reciclado) que son para entregar pero que NO serán corregidas.

4 – Identifique claramente el problema y la parte del mismo a la que está respondiendo.

5 – Siempre que comience a responder a un nuevo problema, utilice una NUEVA hoja de respuesta. NUNCA mezcle en una misma hoja respuestas de problemas diferentes. Por ejemplo, NO comience a responder al problema 3 en la hoja en la que ya haya respondido al problema 2.

6 - Cuando haya terminado, organice y numere todas las hojas de manera lógica (en la esquina superior derecha), y colóquelas en el sobre junto con el enunciado y las hojas de sucio. Si, por ejemplo, hubiese escrito **12** páginas (incluyendo la que contiene su identificación), la **3ª** página debe ser la **3 /12**.

7 - No está permitido llevarse ningún papel ni ningún otro material que se encuentre en el puesto de trabajo.

1. Planeta-disco (8 puntos)

Los libros de la serie *Discworld* de Terry Pratchett se desarrollan en un planeta con la curiosa forma de un disco plano.

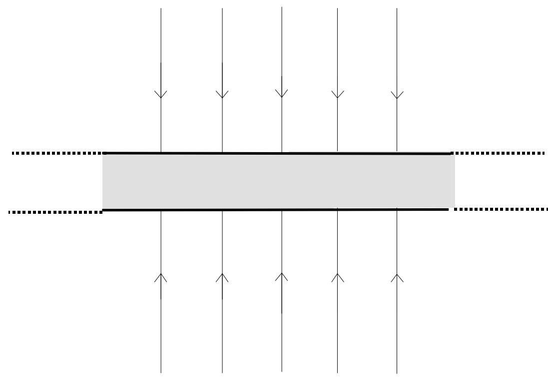

Figura 1: Un planeta con forma de disco plano.

Dicho planeta se cree que se encuentra apoyado en cuatro grandes elefantes que viajan por el espacio sobre una enorme tortuga. Pero estos detalles no son importantes.

Lo que interesa en este caso es explorar aspectos del campo gravitatorio de un planeta plano, utilizando las semejanzas entre la ley de gravitación universal de Newton y la ley de Coulomb:

$$\vec{F}_{\mathrm{g}} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{\mathrm{e}}_r \text{ (gravitación)}$$

$$\vec{F}_{\mathrm{e}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\mathrm{e}}_r \text{ (Coulomb)}$$

donde $\hat{e}_r$ designa vector unitario.

(Dato: radio de la Tierra, $R_{\mathrm{T}} = 6{,}4 \times 10^6$ m)

(a) De acuerdo con la ley de Gauss, el flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a

$$\Phi_{\mathrm{e}} = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

donde q es la carga encerrada por la superficie.

Escriba la forma correspondiente de la ley de Gauss para el campo gravitatorio.

(b) Empleando el teorema de Gauss, determine el valor del campo gravitatorio en el exterior de un planeta con la forma de un disco, cerca de la superficie y lejos de los bordes. El espesor del disco es mucho menor que su radio y puede ser despreciado. Denote por μ la densidad superficial de masa del planeta (masa por unidad de área).

(c) En esta parte se va a considerar el espesor, d, de *Discworld*, que es un planeta con una densidad igual a la de la Tierra, ρ_T, y una aceleración de la gravedad en su superficie, g_D, igual a la de la Tierra, g. Encuentre la relación entre el espesor de *Discworld* y el radio de la Tierra.

(d) Suponga que hay un agujero que atraviesa todo el espesor de *Discworld,* como indica la figura 2. Suponiendo que el interior del planeta tiene una densidad uniforme, utilice la Ley de Gauss para demostrar que el campo gravitatorio en un agujero perpendicular a la superficie tiene la forma $\vec{g} = g(z)\,\hat{e}_z$, con

$$g(z) = -\frac{2g_D}{d}z\,,$$

donde z es la coordenada vertical con origen en el plano medio del planeta y g_D es el módulo de la aceleración de la gravedad en la superficie.

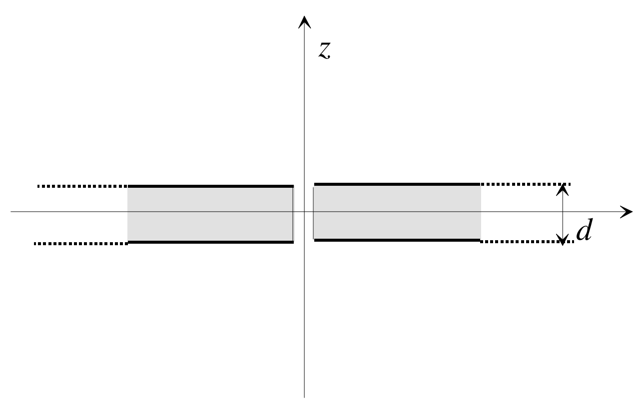

Figura 2: Un agujero atraviesa todo el espesor de *Discworld*.

(e) Muestre que un objeto cualquiera que se deja caer desde el borde del pozo va a oscilar armónicamente. Determine el período del movimiento.

2. Disco de Faraday (8 puntos)

Un disco metálico (de masa m y radio a) se encuentra situado en una región en la que existe un campo magnético uniforme, $\vec{B}$, dirigido según su eje. Si el disco se pone a girar con velocidad angular $\vec{\omega}$, se establece una diferencia de potencial, ΔV, entre el borde del disco y su eje de rotación.

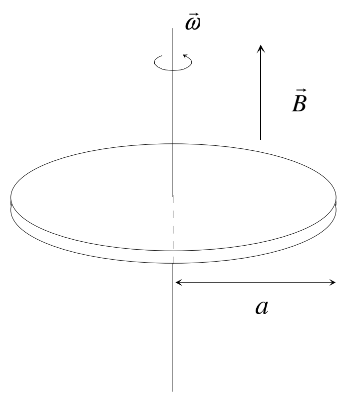

Figura 1: Disco metálico en rotación en un campo magnético uniforme.

(a) Determine la fuerza magnética, $\vec{F}_{\mathrm{m}}$, sobre las cargas libres del metal.

(b) Cuando se alcanza el estado estacionario, la resultante de las fuerzas eléctrica y magnética sobre las cargas libres del metal es nula. Si la velocidad angular $\vec{\omega}$ y el campo magnético $\vec{B}$ tienen el mismo sentido, como se muestra en la figura, demuestre que la diferencia de potencial es

$$\Delta V = \frac{\phi}{T}$$

en la que ϕ es el flujo del campo magnético a través del disco y T es el período de rotación.

(c) Imagine que se conecta una resistencia exterior, R, entre el eje y el borde del disco, de forma que se permita el paso de corriente. La diferencia de potencial y la velocidad angular disminuyen con el tiempo, pero en cada instante ΔV es la misma que existiría con el circuito abierto para esa velocidad angular. Llevando a cabo un balance de energía, demuestre que la energía cinética de rotación del disco, E_c, disminuye con el tiempo, por efecto Joule, de acuerdo con

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = -\frac{E_c}{\tau}$$

donde τ es un tiempo característico. Exprese τ en función de los parámetros conocidos.

(d) Los resultados obtenidos para discos son válidos para cilindros. Se comprobó experimentalmente que un cilindro de cobre de masa m = 1 kg y radio a = 2 cm, colocado en un campo B = 1 T y puesto a rotar con una resistencia R = 10 Ω conectada entre el eje y el borde, se detenía al cabo de unos 10 minutos. ¿Se puede explicar esta observación experimental considerando solamente la disipación de energía por efecto Joule? Justifique su respuesta.

3. Precisión de la datación por carbono 14 (6 puntos)

Se dice que un isótopo es radiactivo cuando, por ejemplo, por emisión (o captura) de alguna partícula, se puede transformar en otro. En este tipo de transformaciones, o decaimientos, la tasa de desintegración, i.e., el número de átomos que experimentan el proceso por unidad de tiempo, es proporcional al número de átomos existentes, *N*. Matemáticamente, el proceso viene descrito por

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N$$

donde λ es una constante característica de cada proceso, que se denomina *constante de decaimiento* (o *constante de desintegración*).

Como consecuencia del constante bombardeo de la parte superior de la atmósfera por rayos cósmicos, el nitrógeno 14 se puede transformar en carbono 14 según la reacción ${}^{14}_{7}\mathrm{N} + n \rightarrow {}^{14}_{6}\mathrm{C} + p$. A su vez, el carbono 14 es radiactivo, con un tiempo de vida media de 5700 años, y decae en nitrógeno 14 según la reacción

$${}^{14}_{6}\mathrm{C} \rightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N} + \beta^- + \bar{\nu}$$

($\bar{\nu}$ representa un antineutrino).

El carbono 14 se mezcla con los otros isótopos de carbono existentes en la naturaleza, como el carbono 12, pasando con ellos a formar parte de los compuestos orgánicos. El porcentaje de este isótopo del carbono en los seres vivos es prácticamente constante a lo largo de su vida. Cuando el ser vivo muere, cesa el intercambio de carbono con el exterior y el contenido en carbono 14 va disminuyendo debido a su decaimiento radiactivo, mientras que la cantidad de carbono 12 permanece constante. De esta forma, es posible llevar a cabo la datación de una muestra a través de la medida de la radiactividad presente.

(a) Relacione el tiempo de vida media de una muestra (tiempo en que el número de núcleos radiactivos se reduce a la mitad) con la constante de decaimiento y calcule el valor de ésta para el carbono 14.

(b) Determine la edad de una muestra que contiene un 10% del carbono 14 existente en un ser vivo.

(c) Tomando en consideración que actualmente se consigue detectar un porcentaje mínimo del 0,06% del carbono 14 existente en una muestra, estime cuál es la máxima edad que se consigue determinar con esta técnica de datación.

(d) La actividad es el número de desintegraciones por unidad de tiempo. ¿Cuál es la actividad de una muestra de carbono en la que existan 10^{15} átomos de carbono 14?

4. Enfriamiento de átomos (8 puntos)

En 1997 el Premio Nóbel de Física les fue concedido a Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji y Willian D. Philips por su contribución al desarrollo de métodos para enfriar y atrapar átomos. Eric A. Cornell, Wolfgang Ketterle y Carl E. Wieman utilizaron estos métodos para obtener la condensación de Bose-Einstein en gases diluidos de átomos alcalinos, por lo que recibieron el Premio Nóbel de Física en 2001. El fundamento de estos métodos es la técnica que se denomina "*laser cooling*", en la cual se utiliza la colisión entre fotones (provenientes de un láser) y los átomos del gas que se pretende enfriar. El láser emite fotones con una energía tal que un fotón puede ser absorbido cuando colisiona con un átomo del gas.

Se pretende enfriar un gas de átomos de sodio (M = 23 g/mol) que se encuentra a la temperatura de 300 K con un láser que emite fotones con una energía tal que un átomo de sodio, al absorber un fotón, salta del estado fundamental ($E_{\text{fund}} = -5{,}14$ eV) hasta el primer estado excitado ($E_{\text{exc}} = -3{,}04$ eV).

Puede considerar que la temperatura, T, del gas se relaciona con la energía cinética media, E_c, de los átomos de sodio a través de la expresión

$$E_c = \frac{3}{2} k_B T$$

donde k_B es la constante de Boltzmann.

Datos: $N_A=6{,}02\times10^{23}$ mol^{-1}; $c = 3{,}00\times10^{8}$ m s^{-1}; $h = 6{,}63\times10^{-34}$ J s; $k_B=1{,}38\times10^{-23}$ J K^{-1}.
1 eV = $1{,}60\times10^{-19}$ J.
Considere que los átomos son no relativistas.

(a) ¿Cuál es la velocidad media de un átomo de sodio en un gas a 300 K?

(b) Obtenga una expresión para la variación de la velocidad de un átomo de sodio cuando colisiona frontalmente con un fotón del citado láser. Calcule el valor numérico para esa variación, considerando que la energía del fotón absorbido es *exactamente igual* a la energía de la transición. ¿Cuántas colisiones de este tipo serían necesarias para detener un átomo de sodio?

(c) En realidad, como la variación de la energía cinética del átomo no es nula, la energía del fotón *no es exactamente igual* a la energía de la transición.

(c.1) Demuestre que la variación de la energía cinética del átomo asociada a la absorción del fotón en una colisión frontal se puede escribir como

$$\Delta E_{\mathrm{c}} = -m\left|v_{\mathrm{i}}\right|\left|\Delta v\right| + \frac{1}{2}m\left|\Delta v\right|^2,$$

donde las magnitudes $|v_{\mathrm{i}}|$ y $|\Delta v|$ son los módulos de los vectores *velocidad inicial* y *variación de la velocidad del átomo*, respectivamente.

(c.2) Calcule la razón $\Delta E_{\mathrm{c}} / E_{\text{fot}\acute{o}n}$ para los átomos con la velocidad obtenida en (a), considerando que, en este caso, el primer término de la expresión anterior para ΔE_{c} es la dominante (es decir, que el segundo término del segundo miembro de esta expresión es despreciable) y que puede utilizar para la variación de la velocidad del átomo el resultado obtenido en la parte (b).

(d) La temperatura final alcanzada en un enfriamiento de este tipo está limitada inferiormente por lo que se denomina límite de retroceso (*recoil limit*) relacionado con el retroceso de los átomos en el proceso de absorción y emisión.

(d.1) Obtenga una expresión para la variación de la energía cinética de un átomo con velocidad inicial nula que absorbe un fotón y demuestre que, en este caso, la energía del fotón debe ser mayor que la energía de la transición atómica.

(d.2) Calcule la diferencia de energía cinética del apartado anterior, sabiendo que $E^2_{\text{fotón}} / mc^2$ se puede aproximar por $E^2_{\text{transición}} / mc^2$, donde m representa la masa del átomo de sodio y $E_{\text{fotón}}$ la energía del fotón absorbido.

(d.3) Considere que el átomo que absorbió un fotón en las condiciones del apartado anterior, que quedó en estado excitado, emite un fotón en la misma dirección y en sentido opuesto al de su velocidad. Calcule la variación de la energía cinética del átomo. También en este caso puede utilizar la aproximación $E'^2_{\text{fotón}} / mc^2 \approx E^2_{\text{transición}} / mc^2$, en la que $E'_{\text{fotón}}$ es la energía del fotón emitido.

(d.4) Considerando este proceso de absorción y de emisión, calcule la ganancia de energía final del átomo y la temperatura a que corresponde. ¿Cuál es la importancia del proceso en el enfriamiento de átomos?