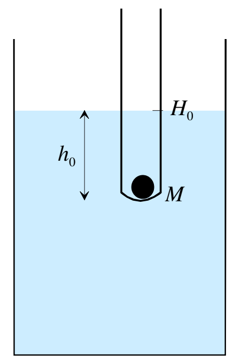
EXPERIÊNCIA 1: Pesa-espíritos

EXEMPLO DE RESOLUÇÃO:

Esquema da montagem:



As seguintes considerações devem ser feitas inicialmente ou ao longo do trabalho:

M = massa do tubo + massa adicionada necessária para o equilibrar na vertical.
$V_0 = h_0 \pi r^2$ volume de tubo imerso em equilíbrio com a massa M (r é o raio externo da secção do tubo de ensaio e h_0 o comprimento da parte imersa do tubo).

Nestas condições de equilíbrio o peso total do tubo é igual à força de impulsão do líquido:

$$P = I$$

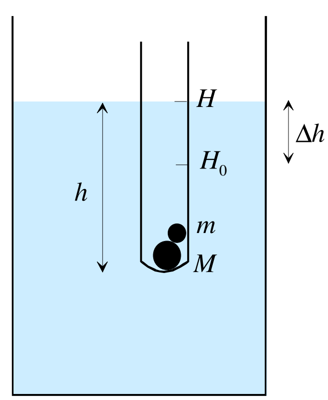
ou

$$M\, g = V_0\, \rho_L\, g$$

em que ρ_L é a densidade do líquido e g a aceleração da gravidade. Ou seja

$$M = V_0\, \rho_L$$

Ao adicionarmos uma massa m o tubo mergulha até atingir uma nova posição de equilíbrio.



Na nova posição de equilíbrio:

$$(M + m)\, g = V\, \rho_L\, g$$
$$M + m = V_0\, \rho_L + \Delta V\, \rho_L$$
$$m = \Delta V\, \rho_L$$

Como $\Delta V = \pi\, r^2\, \Delta h$ vem

$$m = \pi\, r^2\, \Delta h\, \rho_L$$

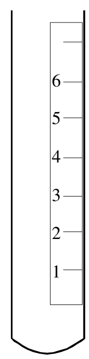
$$\boxed{\Delta h = \frac{1}{\rho_L\, \pi\, r^2}\, m}$$

A constante de proporcionalidade entre a altura a que mergulha o tubo e a massa adicionada depende da densidade do líquido e do raio da secção do tubo.

A) MÉTODO ESTÁTICO

1 -

Para se poder determinar o nível a que o tubo está mergulhado foi introduzido dentro deste um pedaço de folha de papel milimétrico com uma escala marcada:



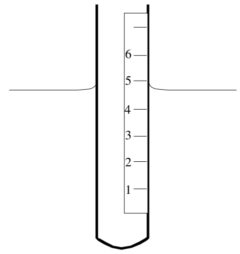
Massa do tubo já com o papel milimétrico, M_{tubo} = 78,8 g ± 0,1g
Nº de grãos de chumbo adicionados = 80
Massa de chumbo adicionado: 80 × (0,88 g ± 0,01 g) = 70,4 g ± 0,8 g
Massa total do tubo+chumbo:

M = (78,8 g ± 0,1 g) + (70,4 g ± 0,8 g) = 149,2 g ± 1,7 g
M = 0,1492 kg ± 0,0017 kg

Diâmetro do tubo de ensaio (paquímetro): d = 29,70 mm ± 0,05 mm

Raio do tubo: r = 14,85 mm ± 0,03 mm
r = 0,01485 m ± 0,00003 m

Profundidade a que mergulha o tubo com a massa M: h_0 = 11,9 cm ± 0,1 cm (o valor de h foi sempre medido na parte superior do menisco)



2 -

Para determinar a dependência da profundidade a que o tubo mergulha em função da massa adicionada fomos adicionando 10 esferas de cada vez e registando a profundidade a que o tubo atingia o equilíbrio. Os resultados estão na seguinte tabela

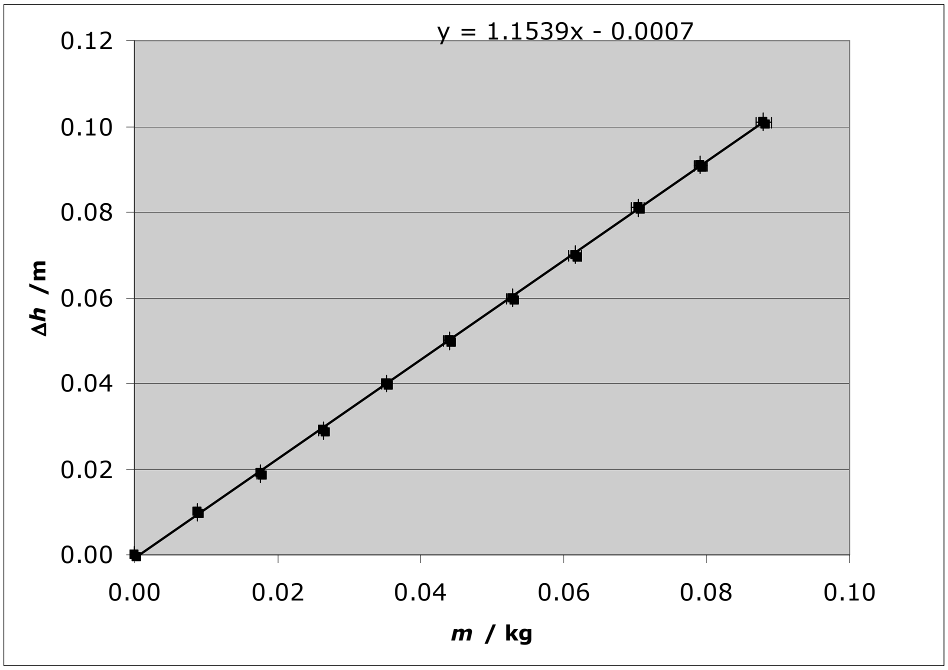
Nº de esferas de chumbo adicionadas	**Profundidade h /cm (± 0,1 cm)**
0	11,9
10	10,9
20	10,0
30	9,0
40	7,9
50	6,9
60	5,9
70	4,9
80	3,8
90	2,8
100	1,8

Na seguinte tabela mostram-se os valores determinados bem como a massa total adicionada, m, e a variação de altura, Δh:

Nº esferas	**$m \times 10^3$ / kg**	**h / m (± 0,001 m)**	**Δh / m (± 0,002 m)**
0	0	0,119	0
10	8,80 ± 0,03	0,109	0,010
20	17,60 ± 0,05	0,100	0,019
30	26,40 ± 0,05	0,090	0,029
40	35,20 ± 0,06	0,079	0,040
50	44,00 ± 0,07	0,069	0,050
60	52,80 ± 0,08	0,059	0,060
70	61,60 ± 0,08	0,049	0,070
80	70,40 ± 0,09	0,038	0,081
90	79,20 ± 0,09	0,028	0,091
100	88,0 ± 0,1	0,018	0,101

3 -

Na figura seguinte mostra-se o gráfico dos resultados com a indicação do erro nas medidas. O erro nas massas (Δm) é muito pequeno e está incluído no símbolo do ponto. Está indicada a equação da melhor recta que se ajusta aos pontos experimentais.



O declive da recta é m = 1,154 m kg^{-1}. Portanto,

$$1{,}154 = \frac{1}{\rho_L\, \pi\, r^2}$$

de onde se extrai o valor da densidade do líquido: ρ_L =1/(1,154 π r^2). Substituindo pelos valores conhecidos:

$$\boxed{\rho_L = 1251 \text{ kg m}^{-3}}$$

4 -

Como a regressão linear não indica o erro na inclinação da recta vamos fazer uma estimativa calculando essa mesma inclinação a partir de dois valores do gráfico, os pontos (x,y) = (0,0352; 0,040) e (0,088; 0,101):

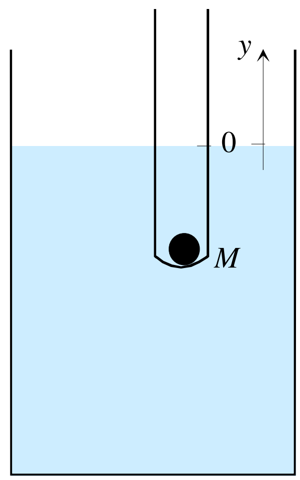
$$m = \frac{(0{,}101 \pm 0{,}002) - (0{,}041 \pm 0{,}002)}{(0{,}088 \pm 0{,}002) - (0{,}035 \pm 0{,}002)} = 1{,}15 \pm 0.06$$

Com este valor para o erro podemos calcular de novo a densidade do líquido:

ρ_L =1/[1,154±0.06 × 3.1416 × (0,01485^2)±4x10^{-5}] ≈ (**1250 ± 200) kg m^{-3}**

B) MÉTODO DINÂMICO

5 -
Com a massa do tubo de ensaio+chumbos constante, se afastarmos, na vertical, o tubo do seu ponto de equilíbrio, a variação na força de impulsão vai traduzir-se numa força de restauro da posição de equilíbrio da forma: $F = -\,\Delta V\,\rho_L\,g$



O sinal menos na expressão anterior garante que, ao mergulhar $\Delta V < 0$ ($y < 0$) e $F > 0$, e o simétrico se $y > 0$. Substituindo ΔV pelo seu valor em função do raio do tubo e de y obtemos:

$$F = -\,(\pi\, r^2\, y)\,\rho_L\, g$$
$$F = -\,(\pi\, r^2\, \rho_L\, g)\, y$$

Que é uma força elástica do tipo $F = -k\,x$, com

$$k = \pi\, r^2\, \rho_L\, g$$

e o movimento oscilatório tem frequência angular $w = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{M}}$ em que M é a massa total do sistema (tubo+chumbos) que oscila. O período é dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{\pi\, r^2 \rho_L\, g}}$$

onde r, g e M são conhecidos pelo que, se determinarmos T, podemos calcular ρ_L:

$$\rho_L = \frac{4\pi M}{T^2 r^2 g}$$

6 -
Para equilibrar o tubo na vertical foram adicionadas 100 esferas de chumbo.

Massa total do tubo + esferas de chumbo: M = 166,8 g ± 0,1 g

Procedimento para medir T: mergulha-se o tubo, mantendo-o vertical, e larga-se começando a contar o tempo com o cronómetro. Regista-se o tempo que o tubo demora a completar 5 oscilações. Os resultados estão na tabela seguinte:

Nº oscilações	tempo (/s)	T (/s)
5	4,72	0,94
5	4,62	0,92
5	4,69	0,94
5	4,53	0,91
5	4,53	0,91
5	4,69	0,94
5	4,53	0,91
5	4,61	0,92
5	4,52	0,91

Fazendo a média e determinando o desvio padrão obtemos:

$$T = 0{,}92 \text{ s} \pm 0{,}02 \text{ s}$$

Note-se que este valor do erro inclui apenas desvios estatísticos, podendo haver erros sistemáticos.

7 -

Da equação que relaciona a densidade do líquido com o período T, $\rho_{\mathrm{L}} = \dfrac{4\pi M}{T^2 r^2 g}$, e substituindo os valores conhecidos, obtemos

$$\rho_{\mathrm{L}} = \frac{4 \times \pi(0{,}1668 \pm 0{,}0001)}{(0{,}92 \pm 0{,}02)^2 \times (0{,}01485 \pm 0{,}00003)^2 \times (9{,}81 \pm 0{,}01)}$$

$$\boxed{\rho_{\mathrm{L}} \approx (1140 \pm 180) \text{ kg m}^{-3}.}$$

Os dois valores obtidos para a densidade do líquido

A) 1250 kg m^{-3} ± 200 kg m^{-3} e **B) 1140 kg m^{-3} ± 180 kg m^{-3},**

são consistentes dentro do erro experimental.

No segundo método não se entrou em conta com a viscosidade da água. Esta tem duas consequências: 1) o movimento passa a ser amortecido em vez de harmónico simples (como se verifica); 2) há um certo volume de água que passa a oscilar, esta oscilação da água pode ser traduzida num factor correctivo à massa M do tubo no sentido de a aumentar; como estamos a usar o valor medido de M e não o corrigido, que seria maior, o valor encontrado para a densidade por este método deve ser inferior ao valor real.