

Hidrogénio e galáxias (10 pontos)

O objetivo deste problema é estudar a física peculiar das galáxias, como a sua dinâmica e estrutura. Em particular, explicamos como medir a distribuição de massa da nossa galáxia a partir do seu interior. Para tal, vamos focar-nos no hidrogénio, o seu principal constituinte.

Ao longo deste problema usaremos apenas \hbar , definido como $\hbar = h/2\pi$.

Parte A - Introdução

Modelo de Bohr

Assumimos que o átomo de hidrogénio é constituído por um eletrão não relativista, com massa m_e , que orbita um protão fixo. Para esta parte, assumimos que o movimento se restringe a uma órbita circular.

A.1	Determine a velocidade do eletrão v numa órbita circular de raio r .	0.2pt
------------	--	-------

No modelo de Bohr, assumimos que a magnitude do momento angular do eletrão L é quantizada, $L = n\hbar$ onde $n > 0$ é um número inteiro. Definimos $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx 7.27 \times 10^{-3}$.

A.2	Mostre que o raio de cada órbita é dado por $r_n = n^2 r_1$, em que r_1 se designa por raio de Bohr. Escreva r_1 em função de α , m_e , c e \hbar e calcule o seu valor numérico com três algarismos significativos. Escreva v_1 , a velocidade na órbita de raio r_1 , em termos de α e c .	0.5pt
------------	---	-------

A.3	Determine a energia mecânica do eletrão E_n numa órbita circular de raio r_n em termos de e , ϵ_0 , r_1 e n . Determine E_1 no estado fundamental em termos de α , m_e e c . Calcule o seu valor numérico em eV.	0.5pt
------------	--	-------

Estruturas fina e hiperfina do hidrogénio

A inversão do spin do eletrão no átomo de hidrogénio, um evento raro e espontâneo, resulta na emissão de um fóton, em média, a cada 10 milhões de anos. Esta emissão serve como assinatura do hidrogénio no Universo e é, por isso, fundamental em astrofísica. Vamos estudar a transição responsável por esta emissão em duas etapas.

Primeiro, consideramos a interação entre o spin do eletrão e o movimento relativo do eletrão e do protão. Trabalhando no referencial do eletrão, o protão orbita o eletrão a uma distância r_1 . Isto produz um campo magnético \vec{B}_1 .

A.4	Determine a magnitude B_1 de \vec{B}_1 na posição do eletrão em termos de μ_0 , e , α , c e r_1 .	0.5pt
------------	--	-------

Em segundo lugar, o spin do eletrão cria um momento magnético $\vec{\mathcal{M}}_s$. A sua magnitude é aproximadamente $\mathcal{M}_s = \frac{e}{m_e} \hbar$. A *estrutura fina* (F) está relacionada com a diferença de energia ΔE_F entre um eletrão com um momento magnético $\vec{\mathcal{M}}_s$ paralelo a \vec{B}_1 e o de um eletrão com $\vec{\mathcal{M}}_s$ antiparalelo a \vec{B}_1 . Do mesmo modo, a *estrutura hiperfina* (HF) está relacionada com a diferença de energia ΔE_{HF} , devida à interação entre os momentos magnéticos paralelo e antiparalelo do eletrão e do protão. Sabe-se que é aproximadamente $\Delta E_{HF} \approx 3.72 \frac{m_e}{m_p} \Delta E_F$ onde m_p é a massa do protão.

- A.5** Escreva ΔE_F em função de α e E_1 . 0.5pt
 Escreva o comprimento de onda λ_{HF} de um fóton emitido durante a transição entre os dois estados da estrutura hiperfina e dê o seu valor numérico com dois algarismos significativos.

Parte B - Curvas de rotação das galáxias

Dados

- Kiloparsec: $1 \text{ kpc} = 3.08 \times 10^{19} \text{ m}$
- Massa solar : $1 M_\odot = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$

Consideramos uma galáxia esférica centrada em torno de um ponto fixo O . Em qualquer ponto P , seja $\rho = \rho(P)$ a densidade volumétrica de massa e $\varphi = \varphi(P)$ o potencial gravitacional associado (isto é, a energia potencial por unidade de massa). Tanto ρ como φ dependem apenas de $r = \|\vec{OP}\|$. O movimento de uma massa m localizada em P , devido ao campo φ , está restringido a um plano contendo O .

- B.1** No caso de uma órbita circular, determine a velocidade v_c de um objecto com 0.2pt
 órbita circular a passar em P , em termos de r e $\frac{d\varphi}{dr}$.

A Fig. 1(A) é uma imagem da galáxia espiral NGC 6946 na banda do visível (do Telescópio 0.8m Schulman no Mount Lemmon Sky Center no Arizona). As pequenas elipses na Fig. 1(B) representam medições experimentais de v_c para esta galáxia. A região central ($r < 1 \text{ kpc}$) é chamada de *bojo*. Nesta região, a distribuição da massa é aproximadamente homogénea. A curva vermelha representa uma previsão de v_c se o sistema fosse homogéneo no bojo e kepleriano ($\varphi(r) = -\beta/r$ com $\beta > 0$) fora dele, ou seja, considerando que a massa total da galáxia está concentrada no bojo.

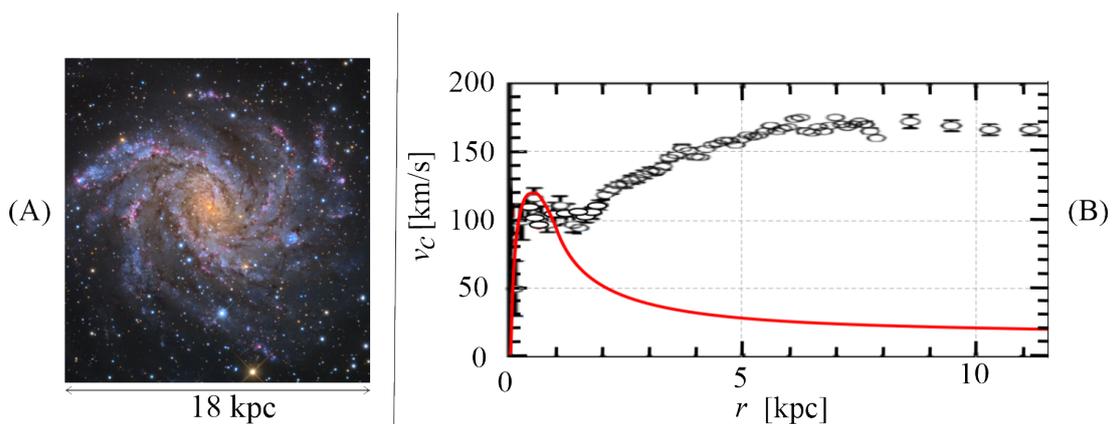


Fig. 1: Galáxia NGC 6946: Imagem (A) e curva de rotação (B).

- B.2** Deduza a massa M_b do bojo da NGC 6946 a partir da curva de rotação vermelha 0.5pt
 na Fig. 1(B), em unidades de massa solar.

A comparação entre o modelo kepleriano e os dados experimentais deixa os astrónomos confiantes de que parte da massa é invisível na imagem. Assim, supõem que a densidade de massa real da galáxia é dada por

$$\rho_m(r) = \frac{C_m}{r_m^2 + r^2} \quad (1)$$

em que $C_m > 0$ e $r_m > 0$ são constantes.

B.3 Mostre que o perfil de velocidade $v_{c,m}(r)$, correspondente à densidade de massa 1.8pt

na Eq. 1, pode ser escrito como $v_{c,m}(r) = \sqrt{k_1 - \frac{k_2 \cdot \arctan(\frac{r}{r_m})}{r}}$. Escreva k_1 e k_2 em termos de C_m , r_m e G .

(Dicas: $\int_0^r \frac{x^2}{a^2 + x^2} dx = r - a \arctan(r/a)$, e: $\arctan(x) \simeq x - x^3/3$ para $x \ll 1$.)

Simplifique $v_{c,m}(r)$ para $r \ll r_m$ e para $r \gg r_m$.

Mostre que, se $r \gg r_m$, a massa $M_m(r)$ interior a uma esfera de raio r com a densidade de massa dada pela Eq. 1 simplifica e depende apenas de C_m e r .

Estime a massa da galáxia NGC 6946 efetivamente presente na imagem da Fig. 1(A).

Parte C - Distribuição da massa na nossa galáxia

Para uma galáxia em espiral, o modelo da Eq. 1 é modificado e assume-se tipicamente que o potencial gravitacional é dado por $\varphi_G(r, z) = \varphi_0 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \exp\left[-\left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]$, em que z é a distância ao plano galáctico (definido por $z = 0$), $r < r_0$ é agora o raio axial e $\varphi_0 > 0$ uma constante a determinar. Os valores r_0 e z_0 são constantes.

C.1 Encontre a equação de movimento em z para o movimento vertical de uma 0.5pt
massa pontual m sujeita a um tal potencial, assumindo que r é constante. Mostre que, se $r < r_0$, o plano galáctico corresponde a um estado de equilíbrio estável, dando a frequência angular ω_0 para pequenas oscilações em torno do mesmo.

A partir deste ponto, definimos $z = 0$.

C.2 Identifique o regime, $r \gg r_m$ ou $r \ll r_m$, para o qual o modelo da Eq. 1 se reduz 0.6pt
a um potencial da forma $\varphi_G(r, 0)$, para uma definição adequada de φ_0 .
Sob esta condição, $v_c(r)$ torna-se independente de r . Exprima-a em termos de φ_0 .

Assim, fora do bojo, o módulo da velocidade v_c não depende da distância ao centro galáctico. Usaremos este facto, como fazem os astrónomos, para medir a distribuição da massa da galáxia a partir do seu interior.

Todos os objectos galácticos considerados aqui para observações astronómicas, tais como estrelas ou nebulosas, são compostos maioritariamente por hidrogénio. Fora do bojo, assumimos que rodam em órbitas circulares em torno do centro galáctico C . S é a posição do Sol e E a posição de um dado objeto galáctico que emite no espetro do hidrogénio. No plano galáctico, consideramos uma linha de visão SE correspondente à orientação de uma observação, no vetor unitário \hat{u}_v (ver Fig. 2).

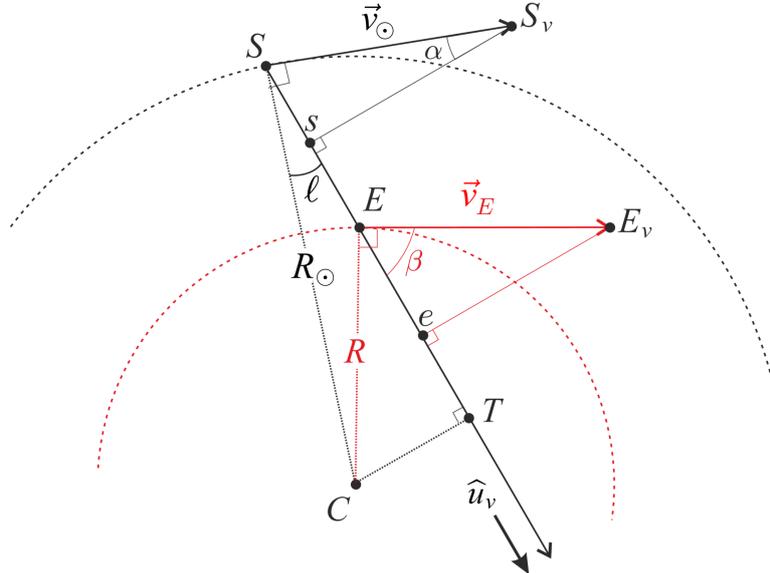


Fig. 2: Geometria da medição

Seja ℓ a longitude galáctica, que mede o ângulo entre SC e o SE . A velocidade do Sol na sua órbita circular de raio $R_{\odot} = 8.00 \text{ kpc}$ é indicada por \vec{v}_{\odot} . Um objeto galáctico em E orbita num outro círculo de raio R à velocidade \vec{v}_E . Utilizando um efeito Doppler na linha espectral de 21 cm previamente estudada, pode-se obter a velocidade radial relativa $v_{rE/S}$ do emissor E em relação ao Sol S : é a projeção de $\vec{v}_E - \vec{v}_{\odot}$ na linha de visão.

C.3 Determine $v_{rE/S}$ em termos de ℓ , R , R_{\odot} e v_{\odot} . De seguida, escreva R em função de R_{\odot} , v_{\odot} , ℓ e $v_{rE/S}$. 0.7pt

Utilizando um radiotelescópio, fazemos observações no plano da nossa galáxia em direção a uma longitude $\ell = 30^\circ$. A banda de frequência utilizada contém a linha espectral 21 cm, cuja frequência é $f_0 = 1.42 \text{ GHz}$. Os resultados são apresentados na Fig. 3.

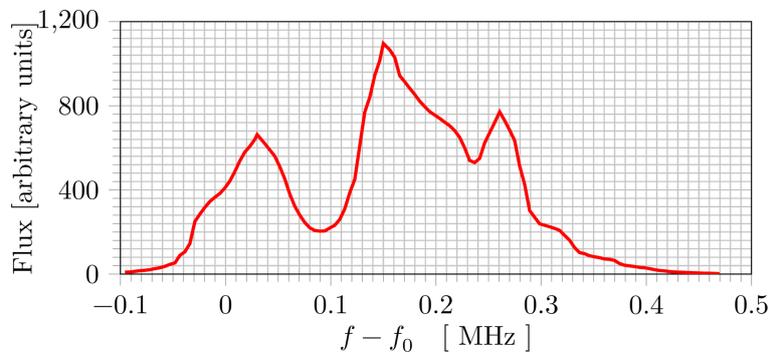


Fig. 3: Sinal eletromagnético em função do desvio de frequência, medido na banda de radio-frequência em $\ell = 30^\circ$ utilizando o EU-HOU RadioAstronomy.

C.4 Na nossa galáxia, $v_{\odot} = 220 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Determine os valores da velocidade radial relativa (com 3 algarismos significativos) e a distância ao centro galáctico (com 2 algarismos significativos) das 3 fontes observadas na Fig. 3. As distâncias devem ser expressas como múltiplos de R_{\odot} . 0.6pt

C.5 Na vista superior da nossa galáxia (na caixa de respostas), indique as posições das fontes observadas na Fig. 3. O que é que se pode deduzir repetindo estas medições mudando ℓ ? 0.6pt

Parte D - Relação Tully-Fisher e teoria de MOND

A parte externa plana da curva de velocidades da NGC 6946 na Fig. 1 é uma propriedade comum das galáxias em espiral, como se pode ver na Fig. 4 (esquerda). Fazendo um gráfico do valor da velocidade externa constante $v_{c,\infty}$ em função da massa total medida M_{tot} de cada galáxia obtém-se uma correlação interessante chamada relação de Tully-Fischer, ver Fig. 4 (direita).

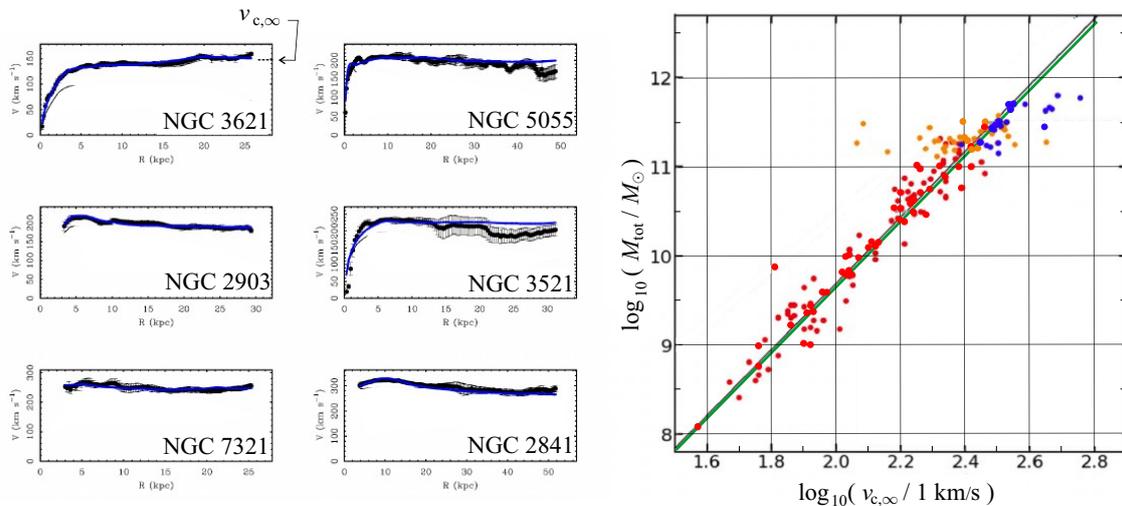


Fig. 4. Esquerda: Curvas de rotação para galáxias em espiral típicas; Direita: $\log_{10}(M_{\text{tot}})$ em função de $\log_{10}(v_{c,\infty})$ em escalas lineares. Os pontos coloridos correspondem a diferentes galáxias e diferentes observações. A linha a verde corresponde à relação de Tully-Fischer, que tem uma boa concordância com a melhor regressão linear aos dados (em preto).

D.1 Assumindo que o raio de uma galáxia, R , não depende da sua massa, mostre que o modelo da Eq. 1 (parte B) resulta uma relação da forma $M_{\text{tot}} = \eta v_{c,\infty}^{\gamma}$, onde γ e η devem ser especificados. Compare esta expressão com a relação de Tully Fischer, calculando γ_{TF} . 0.4pt

No regime de aceleração extremamente baixa, da ordem de $a_0 = 10^{-10} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, a teoria da dinâmica newtoniana modificada (em inglês, MODified Newtonian Dynamics, ou MOND) sugere que se pode modificar a segunda lei de Newton utilizando $\vec{F} = m\mu\left(\frac{a}{a_0}\right)\vec{a}$ onde $a = \|\vec{a}\|$ é o módulo da aceleração e a função μ é

definida por $\mu(x) = \frac{x}{1+x}$.

D.2 Utilizando os dados da NGC 6946 na Fig. 1, estime, de acordo com a teoria de Newton, o módulo da aceleração a_m de uma massa na região externa da NGC 6946. 0.2pt

D.3 Seja m uma massa numa órbita circular de raio r com velocidade $v_{c,\infty}$ no campo gravitacional de uma massa fixa M . No âmbito da teoria MOND, com $a \ll a_0$, determine o expoente de Tully-Fischer. Utilizando os dados da NGC 6946 e/ou a lei de Tully-Fischer, calcule o valor de a_0 para mostrar que a teoria MOND opera no regime correto. 0.8pt

D.4 Considerando casos relevantes, determine $v_c(r)$ para todos os valores de r na teoria MOND, no caso de um campo gravitacional criado por uma massa M homoganeamente distribuída com raio R_b . 0.9pt

Relógio de Cox (10 pontos)

Em 1765, o relojoeiro britânico James Cox inventou um relógio cuja única fonte de energia são as flutuações da pressão atmosférica. O relógio de Cox utiliza dois recipientes contendo mercúrio. Alterações da pressão atmosférica fazem com que o mercúrio se mova entre os recipientes, e com que os dois recipientes se movam um em relação ao outro. Este movimento serve de fonte de energia para o relógio.

Propomos aqui uma análise deste dispositivo. Durante toda a prova, assume-se que

- o campo gravitacional da Terra $\vec{g} = -g \vec{u}_z$ é uniforme com $g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e \vec{u}_z é um vetor unitário;
- todos os líquidos são incompressíveis e a sua densidade é designada por ρ ;
- serão ignorados quaisquer efeitos capilares;
- as variações da pressão atmosférica com a altitude são desprezadas;
- a temperatura ambiente T_a é uniforme e todas as transformações são isotérmicas.

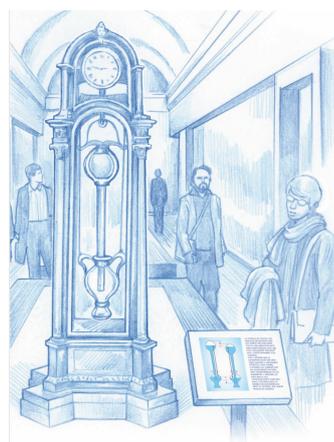


Fig. 1. Vista artística do relógio de Cox ¹

Parte A - Puxar um tubo submerso

Começamos por considerar um banho de água que ocupa um espaço semi-infinito $z \leq 0$. O ar acima do banho está a uma pressão $P_a = P_0$. Um tubo cilíndrico vertical de comprimento $H = 1 \text{ m}$, área de secção transversal $S = 10 \text{ cm}^2$ e massa $m = 0.5 \text{ kg}$ é mergulhado no banho. A extremidade inferior do tubo é aberta, e a extremidade superior é fechada. Designamos por h a altitude do topo do tubo e por z_ℓ a altitude da água no interior do tubo. A espessura das paredes do tubo é desprezada.

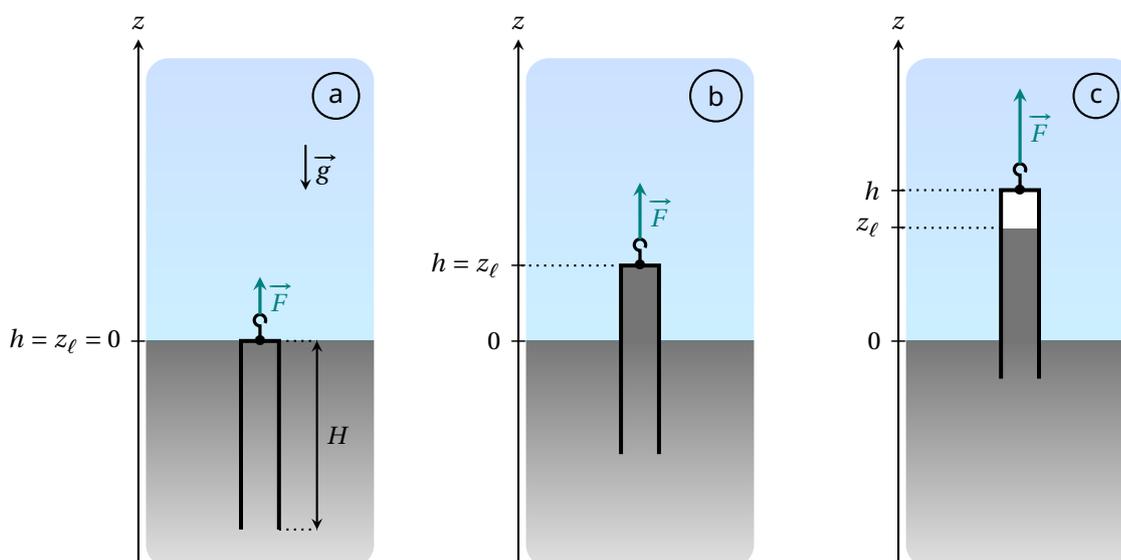


Fig. 2. Esquema do tubo em diferentes configurações

Partimos da situação em que o tubo na Fig. 2 não contém gás e o seu topo está ao nível da superfície do banho: noutras palavras, $h = 0$ e $z_\ell = 0$ (caso a). O tubo é então levantado lentamente, até que a sua extremidade inferior fique ao nível da superfície do banho. A força que puxa o tubo é designada por $\vec{F} = F \vec{u}_z$.

- A.1** Para a configuração apresentada na Fig. 2 (caso b), exprima a pressão P_w na água no topo do tubo. Exprima também a força \vec{F} necessária para manter o tubo nesta posição. As quantidades devem ser escritas em termos de P_0 , ρ , m , S , h , g e \vec{u}_z . 0.2pt

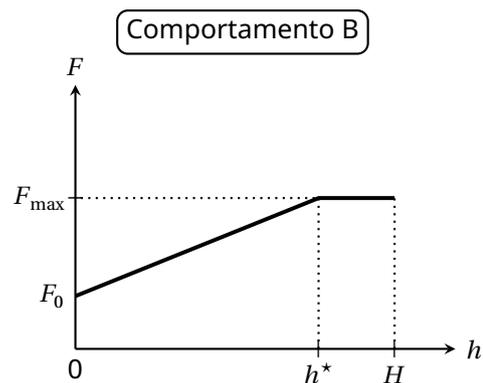
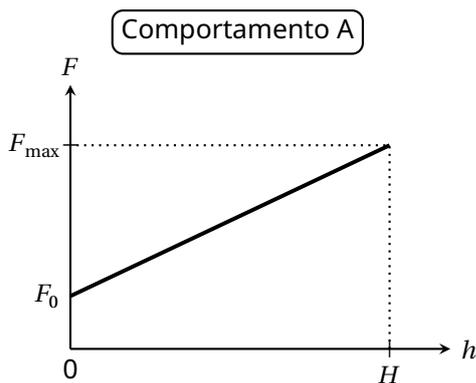
São efectuadas três experiências. Em cada uma delas, o tubo é levantado do estado inicial mostrado na Fig. 2(a) nas condições especificadas na Tabela 1.

Experiência	Líquido	T_a (°C)	ρ (kg · m ⁻³)	P_{sat} (Pa)
1	Água	20	1.00×10^3	2.34×10^3
2	Água	80	0.97×10^3	47.4×10^3
3	Água	99	0.96×10^3	99.8×10^3

Tabela 1. Condições experimentais e valores numéricos das quantidades físicas para cada experiência.

(P_{sat} designa a pressão de vapor de saturação do fluido puro)

Em cada caso, estudamos a evolução da força F que deve ser aplicada para manter o tubo em equilíbrio a uma altitude h , estando a pressão externa fixa a $P_a = P_0 = 1.000 \times 10^5$ Pa. São possíveis dois comportamentos diferentes



- A.2** Para cada experiência, complete a tabela na folha de respostas para indicar o comportamento esperado e os valores numéricos para F_{max} e para h^* (quando relevante), onde F_{max} e h^* se encontram definidos nas figuras que ilustram os dois comportamentos. 0.8pt

Quando substituímos a água por mercúrio líquido (cujas propriedades são dadas abaixo), observa-se o comportamento B.

Líquido	T_a (°C)	ρ (kg·m ⁻³)	P_{sat} (Pa)
Mercúrio	20	13.5×10^3	0.163

A.3 Expresse o erro relativo, denotado ε , incorrido quando avaliamos a força máxima F_{max} desprezando P_{sat} em comparação com P_0 . Obtenha o valor numérico de ε . 0.3pt

Parte B - Tubo barométrico de duas partes

Daqui em diante, trabalhamos com mercúrio (de densidade $\rho = 13.5 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) à temperatura ambiente $T_a = 20^\circ\text{C}$ e assumimos $P_{\text{sat}} = 0$.

Considere-se um tubo com um reservatório no topo, composto de dois cilindros de dimensões diferentes sobrepostos, conforme mostra a Fig. 3.

- a parte inferior (ainda designada por tubo) tem uma área de secção transversal S_t e uma altura $H_t = 80 \text{ cm}$;
- a parte superior (designada por bolbo) tem uma área de secção transversal $S_b > S_t$ e uma altura $H_b = 20 \text{ cm}$.

Este tubo de duas partes é mergulhado num banho líquido semi-infinito.

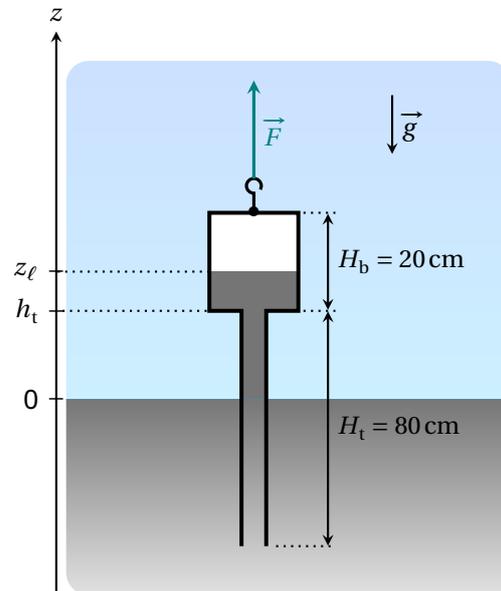


Fig. 3. Esquema do tubo barométrico de duas partes

Tal como na Parte A, o sistema é preparado de modo a que o tubo não contenha ar. Identificamos a posição vertical do tubo pela altura h_t da junção entre a parte inferior do tubo e o bolbo. A altura da coluna de mercúrio é novamente indicada por z_l . A força \vec{F} que tem de ser exercida para manter o tubo em equilíbrio na configuração mostrada na Fig. 3 pode agora ser escrita como

$$\vec{F} = (m_{\text{tb}} + m_{\text{add}}) g \vec{u}_z \quad (1)$$

em que m_{tb} é a massa total do tubo de duas partes (quando vazio).

B.1 Na folha de respostas, indique, colorindo, a região correspondente ao volume de mercúrio líquido responsável pelo termo m_{add} que aparece na equação (1). 0.3pt

A massa m_{add} depende tanto da altura h_t como da pressão atmosférica P_a . Na seguinte questão, suponha que a pressão atmosférica está fixa a $P_a = P_0 = 1.000 \times 10^5 \text{ Pa}$. Partindo da situação em que o sistema está completamente imerso, o tubo é levantado lentamente até que a sua base fique nivelada com o banho líquido.

B.2 Esboce num gráfico a evolução da massa m_{add} em função de h_t para $h_t \in [-H_b, H_t]$. No gráfico, indique a expressão para os declives dos diferentes segmentos, assim como o valor analítico h_t de quaisquer pontos de descontinuidade da derivada, em termos de P_0 , ρ , g , S_b , S_t , H_b e H_t . 1.4pt

À medida que o sistema é elevado enquanto $P_a = P_0 = 10^5$ Pa, paramos quando a superfície livre do líquido está no meio do bolbo. O valor de h_t é fixo e então observamos variações na massa m_{add} devido a variações na pressão atmosférica descritas por

$$P_a(t) = P_0 + P_1(t) \quad (2)$$

onde P_0 designa o valor médio e P_1 é um termo perturbativo. Descrevemos P_1 como uma função triangular periódica de amplitude $A = 5 \times 10^2$ Pa e período τ_1 de 1 semana.

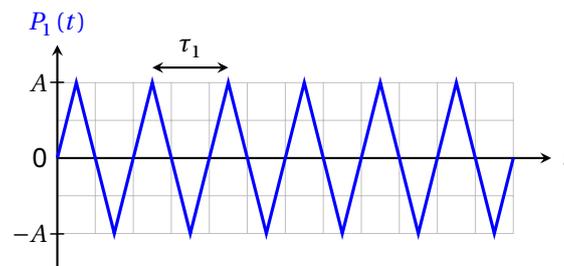


Fig. 4. Modelo simplificado do termo perturbativo $P_1(t)$

B.3 Dado que $S_t = 5 \text{ cm}^2$ e $S_b = 200 \text{ cm}^2$, exprima a amplitude Δm_{add} das variações da massa m_{add} ao longo do tempo e dê o seu valor numérico. Assuma que a superfície do líquido permanece sempre no interior do bolbo. 0.3pt

Parte C - O relógio de Cox

O mecanismo real desenvolvido por Cox é complexo (Fig. 5). Estudamos por isso uma versão simplificada, representada na Fig. 6, e descrita abaixo:

- um reservatório de fundo cilíndrico que contém um banho de mercúrio;
- um tubo barométrico de duas partes, idêntico ao estudado na parte B, completamente esvaziado de ar, é mergulhado no banho;
- o reservatório e o tubo de duas partes são cada um suspensos por um cabo. Os cabos (que se assumem inextensíveis e de massa desprezável) passam através de um sistema de roldanas ideais e terminam ligados a faces opostas de uma mesma massa M , que pode deslizar numa superfície horizontal;
- o volume total de mercúrio líquido contido no sistema é $V_\ell = 5 \text{ L}$.

A altura, secção transversal e massas de cada parte são apresentadas na Tabela 2. A posição da massa M é dada pela coordenada x do seu centro de massa. Consideramos a força de atrito entre o apoio horizontal e a massa M , sem distinção entre coeficientes estático e dinâmico; a magnitude desta força quando o corpo desliza é designada por F_s .

Dois batentes limitam o movimento da massa M de modo a que $-X \leq x \leq X$ (com $X > 0$). Suponha que o valor de X garante que

- o fundo do tubo de duas partes nunca toca no fundo do reservatório nem sai do banho líquido;
- a altura z_ℓ da coluna de mercúrio está sempre no bolbo superior.



Fig. 5. Verdadeiro relógio de Cox² (sem mercúrio)

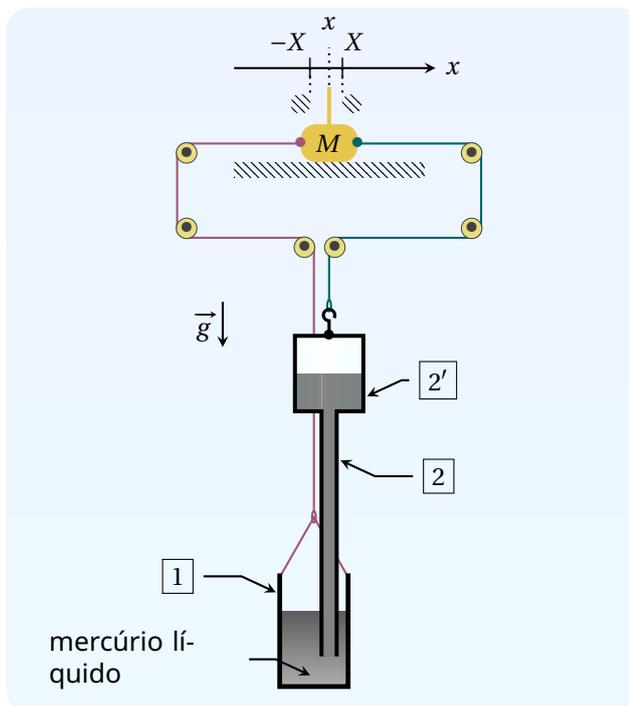


Fig. 6. Esquema do sistema para simulação do relógio

Referência	Nome	Altura	Área da secção	Massa vazia
1	reservatório	$H_c = 30 \text{ cm}$	$S_c = 210 \text{ cm}^2$	m_c
2	parte tubular do tubo barométrico	$H_t = 80 \text{ cm}$	$S_t = 5 \text{ cm}^2$	massa total do tubo barométrico : m_{tb}
2'	bolbo do tubo barométrico	$H_b = 20 \text{ cm}$	$S_b = 200 \text{ cm}^2$	

Tabela 2. Dimensões e notação para o sistema modelo.

O sistema evolui em contacto com a atmosfera, cuja pressão flutua como mostrado na Fig. 4 (ainda com amplitude $A = 5 \times 10^2 \text{ Pa}$ e período $\tau_1 = 1 \text{ semana}$). No início $t = 0$, a massa M está em repouso em $x = 0$ e as tensões exercidas pelos dois cabos de cada lado da massa M estão em equilíbrio enquanto $P_1(0) = 0$. Definimos

$$\xi = \frac{S_b + S_c - S_t}{S_b S_c} \frac{F_s}{A} \simeq \frac{S_b + S_c}{S_b S_c} \frac{F_s}{A} \quad (3)$$

onde na última expressão se assume $S_t \ll S_b, S_c$ (e que assumiremos até ao final do problema).

- C.1** Determine o valor limite ξ^* de modo a que M permaneça indefinidamente em repouso quando $\xi > \xi^*$. 1pt

Para a próxima pergunta apenas, suponha que a massa M está temporariamente bloqueada em $x = X$.

- C.2** Obtenha uma expressão para a tensão total $\vec{T} = T \vec{u}_x$ exercida na massa M devida à tensão dos dois cabos nesta posição, quando $P_1 = 0$, em termos de ρ, g, X , e secções transversais relevantes. 1pt

Quando $\xi < \xi^*$, começando novamente de $x = 0$ e $P_1 = 0$, dois comportamentos diferentes podem ser observados para $t \geq 0$. Para os distinguir, precisamos de introduzir outro parâmetro

$$\lambda = \frac{2(S_b - S_t)}{S_b} \frac{\rho g X}{A} \simeq \frac{2\rho g X}{A} \quad (4)$$

- C.3** Complete a tabela na folha de respostas para indicar sob que condição cada regime é obtido. As condições devem ser indicadas como desigualdades em ξ e/ou λ . Além disso, esboce as variações de $x(t)/X$ para $t \in [0, 3\tau_1]$ que sejam consistentes com as variações de $P_1(t)/A$ já presentes. Não é necessária a especificação de coordenadas de pontos notáveis. 2pt

No verdadeiro relógio de Cox, a energia fornecida por este mecanismo é armazenada usando um sistema de catracas (dispositivos mecânicos que apenas permitem movimento numa direcção) e utilizada para elevar um contrapeso, como num relógio de pêndulo tradicional. Neste modelo simplificado a energia recuperada pelo relógio corresponde à energia dissipada pela força de fricção exercida pela superfície horizontal na massa M . A partir deste ponto, assumimos que o sistema é dimensionado de forma a operar no regime que permite ao relógio recuperar energia. Assumimos também que o regime permanente está estabelecido. Designamos por W a energia dissipada pela força de atrito sólido durante um período τ_1 , que pode ser expressa apenas em termos de F_s e X .

Sendo tudo o resto igual, F_s e X podem ser ajustados para maximizar a energia W ; designamos por F_s^* e X^* os valores das respectivas quantidades na situação ideal.

- C.4** Considerando $S_b \simeq S_c$ e $S_t \ll S_b$, determine as expressões para F_s^* e X^* em função de ρ, g, S_c e A . Escreva a energia máxima correspondente W^* , e de seguida calcule o seu valor numérico para $A = 5 \times 10^2$ Pa. 1pt

Seja W_{pr}^* o trabalho das forças de pressão atmosférica realizado no sistema na situação óptima durante um período τ_1 .

- C.5** Escreva W_{pr}^* e de seguida calcule o quociente W^*/W_{pr}^* . Poderá ser útil representar a evolução do sistema num diagrama (P, V) , em que V é o volume do sistema. 1.7pt

Champagne! (10 pontos)

AVISO: O consumo excessivo de álcool é prejudicial à saúde e proibido por lei abaixo da idade legal para o efeito.

Champagne é um espumante francês. A fermentação de açúcares produz dióxido de carbono (CO_2) dentro da garrafa. A concentração molar de CO_2 na fase líquida c_ℓ e a pressão parcial do gás na fase gasosa P_{CO_2} estão relacionadas através da Lei de Henry $c_\ell = k_{\text{H}} P_{\text{CO}_2}$, onde k_{H} é a chamada constante de Henry.

Dados

- Tensão superficial do *champagne* $\sigma = 47 \times 10^{-3} \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}$
- Densidade da fase líquida $\rho_\ell = 1.0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Constante de Henry a $T_0 = 20^\circ\text{C}$, $k_{\text{H}}(20^\circ\text{C}) = 3.3 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{Pa}^{-1}$
- Constante de Henry a $T_0 = 6^\circ\text{C}$, $k_{\text{H}}(6^\circ\text{C}) = 5.4 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{Pa}^{-1}$
- Pressão atmosférica $P_0 = 1 \text{ bar} = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$
- Os gases assumem-se ideais com coeficiente adiabático $\gamma = 1.3$



Fig. 1. Um copo cheio com *champagne*.

Parte A. Nucleação, crescimento e ascensão de bolhas

Um copo é enchido imediatamente após abrir uma garrafa de *champagne* à temperatura $T_0 = 20^\circ\text{C}$. A pressão no líquido é P_0 e a sua temperatura T_0 permanece constante. A concentração c_ℓ de CO_2 dissolvido excede a concentração de equilíbrio. Vamos estudar a nucleação de uma bolha de CO_2 , de raio a e pressão interna P_b .

A.1 Exprese a pressão P_b em termos de P_0 , a e σ .

0.2pt

No líquido, a concentração de CO_2 depende da distância à bolha. Longe da bolha recuperamos o valor c_ℓ , enquanto que perto da sua superfície a concentração toma o valor c_b . De acordo com a Lei de Henry, $c_b = k_{\text{H}} P_b$. Assume-se neste problema que as bolhas apenas contêm CO_2 .

Uma vez que $c_\ell \neq c_b$, as moléculas de CO_2 difundem das regiões de concentração alta para as regiões de concentração baixa. Assume-se que toda e qualquer molécula que atinja a superfície da bolha a partir da fase líquida é transferida para o vapor.

A.2 Exprese o raio crítico a_c acima do qual é esperado que a bolha cresça, em termos de P_0 , σ , c_ℓ e c_0 , onde $c_0 = k_{\text{H}} P_0$. Calcule numericamente a_c para $c_\ell = 4c_0$.

0.5pt

Na prática, as bolhas crescem maioritariamente a partir de cavidades de gás pré-existentes. Considere-se então uma bolha esférica em repouso, com raio inicial $a_0 \approx 40 \mu\text{m}$. Seja j o número de moles de CO_2 transferidos através da superfície da bolha por unidade de área e de tempo. Há dois modelos possíveis para j :

- modelo (1): $j = \frac{D}{a}(c_\ell - c_b)$ onde D é o coeficiente de difusão de CO_2 no líquido;
- modelo (2): $j = K(c_\ell - c_b)$ onde K é uma constante.

Experimentalmente o raio da bolha $a(t)$ depende do tempo conforme demonstrado na **Fig. 2**. Aqui $c_\ell \approx 4c_0$ e, uma vez que as bolhas são grandes o suficiente para ser visíveis, a pressão adicional devida à

tensão superficial pode ser desprezada e $P_b \approx P_0$.

- A.3** Expresse o número de moles de CO_2 na bolha, n_c , em termos de a, P_0, T_0 e da constante dos gases ideais R . Encontre $a(t)$ para ambos modelos. Indique qual dos modelos explica os resultados da **Fig. 2**. Conforme a sua resposta, calcule numericamente K ou D . 1.2pt

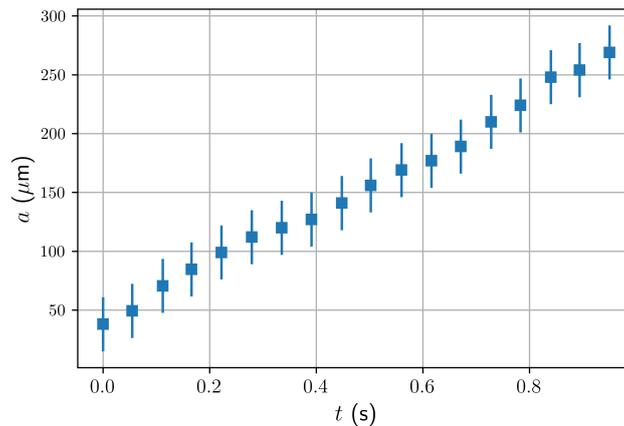


Fig. 2. Evolução temporal do raio de uma bolha de CO_2 num copo de *champagne* (adaptado de [1]).

Eventualmente as bolhas soltam-se do fundo do copo e continuam a crescer enquanto sobem. A **Fig. 3** mostra uma coluna de bolhas. Todas as bolhas da coluna têm o mesmo raio inicial e são emitidas a uma frequência constante de $f_b = 20\text{Hz}$.

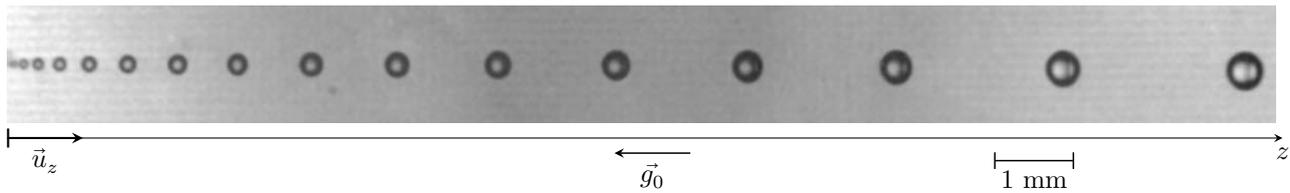


Fig. 3. Uma coluna de bolhas. A foto está rodada para melhor encaixar na disposição da página (adaptado de [1]).

Para a gama de velocidades sob estudo, a força de resistência F que actua numa bolha de raio a que se move a uma velocidade v num líquido com viscosidade dinâmica η , é dada pela Lei de Stokes $F = 6\pi\eta a v$. Observações mostram que a qualquer instante do movimento se pode assumir que a bolha viaja com a sua velocidade terminal.

- A.4** Escreva a expressão das principais forças que actua sobre uma bolha que sobe na vertical. Obtenha a expressão para $v(a)$. Dê uma estimativa numérica para o valor de η usando as constantes g_0 e ρ_ℓ e a informação contida na **Fig. 3**. 0.8pt

O crescimento quase-estacionário das bolhas, com taxa $q_a = \frac{da}{dt}$, permanece válido durante a sua ascensão.

- A.5** Exprese o raio a_{H_ℓ} de uma bolha quando esta chega à superfície, em termos da altura percorrida H_ℓ , da taxa de crescimento $q_a = \frac{da}{dt}$ e de quaisquer constantes que possa precisar. Assuma que $a_{H_\ell} \gg a_0$ e que q_a é constante. Calcule o resultado numérico de a_{H_ℓ} para $H_\ell = 10\text{ cm}$ e usando o valor de q_a correspondente à **Fig. 2**. 0.5pt

Considere que existem N_b sítios de nucleação de bolhas. Assuma que estas nucleam a uma frequência constante f_b no fundo de um copo de *champagne* (altura H_ℓ e volume V_ℓ), com raio inicial a_0 desprezável. Ignore a difusão de CO_2 na superfície livre.

- A.6** Deduza a equação diferencial para $c_\ell(t)$. Obtenha desta equação o tempo característico τ para o decaimento da concentração de CO_2 dissolvido no líquido. 1.1pt

Parte B. Emissão acústica pelo rebentamento da bolha

Bolhas pequenas são aproximadamente esféricas quando atingem a superfície livre. Quando o líquido que separa a bolha do ar fica suficientemente fino, forma-se um buraco circular de raio r no filme que, devido à tensão superficial, se abre muito rapidamente (**Fig. 4.**, esquerda). O buraco expande a velocidade constante v_f (**Fig. 4.**, direita). O filme fora da borda do buraco permanece imóvel, com espessura h constante.

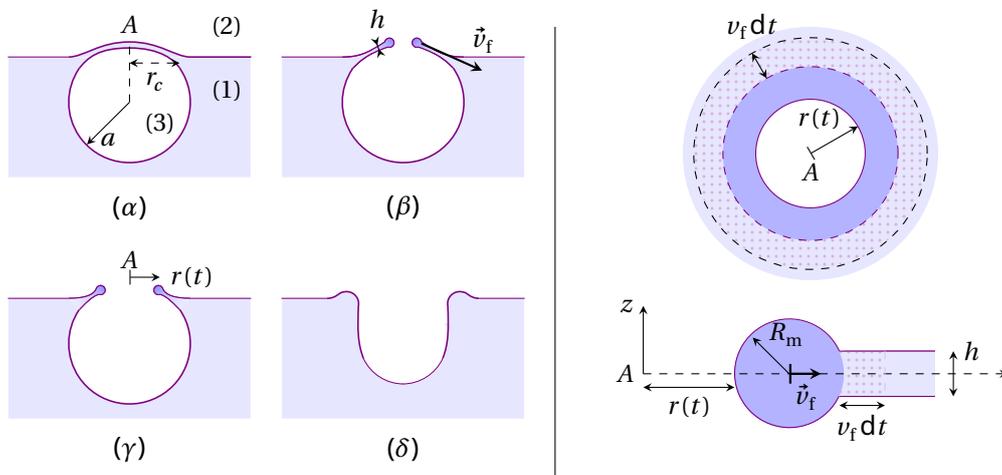


Fig. 4. (Esquerda) (α) Bolha à superfície: (1) líquido, (2) ar à pressão P_0 e (3), CO_2 a pressão P_b , (β) e (γ) retracção do filme de líquido, onde a borda está representada a azul escuro, (δ) colapso da bolha. (Direita) Retracção do filme de líquido no instante t . (Direita, cima) esquema do filme com buraco visto de cima. (Direita, baixo) Secção transversal da borda e do filme em retracção. Durante dt , a borda acumula líquido à sua volta.

Devido a processos dissipativos, apenas metade da diferença da energia de superfície entre t e $t + dt$ do aro e o líquido acumulado é transformada em energia cinética. Assume-se ainda que a variação da superfície da borda é desprezável em comparação com a do filme.

- B.1** Escreva v_f em termos de ρ_ℓ, σ e h . 1.1pt

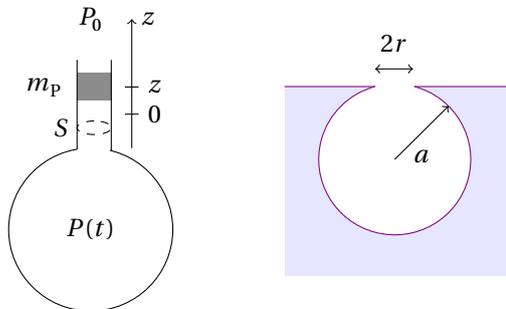


Fig. 5. (Esquerda) Um ressonador de Helmholtz. (Direita) Uma bolha enquanto ressonador.

Quando o filme rebenta, liberta a pressão interna e emite um som. Modelamos este processo de emissão acústica como um ressonador de Helmholtz: uma cavidade aberta para atmosfera a pressão P_0 através de um gargalo com área S (**Fig. 5.** esquerda). No gargalo, uma massa de gás m_p realiza oscilações de pequena amplitude na sua posição devido às forças de pressão que sobre ela actuam quando o gás na cavidade contrai ou expande adiabaticamente. A força gravítica em m_p é desprezável comparada às forças de pressão. Seja V_0 o volume de gás debaixo da massa m_p para $P = P_0$ quando $z = 0$.

- B.2** Expresse a frequência de oscilação f_0 de m_p . (Sugestão: para $\varepsilon \ll 1$, $(1 + \varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\varepsilon$). 1.1pt

O modelo do ressonador de Helmholtz pode ser usado para uma bolha de raio a . O volume da bolha fechada é V_0 . Da literatura, a massa do equivalente do pistão é $m_p = 8\rho_g r^3/3$, onde r é o raio da abertura circular e $\rho_g = 1.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ é a densidade do gás (**Fig. 5.** direita). Durante o rebentamento, r varia entre 0 e r_c , sendo este último dado por $r_c = \frac{2}{\sqrt{3}} a^2 \sqrt{\frac{\rho_l g_0}{\sigma}}$. Durante este processo a frequência do som emitido aumenta até ao valor máximo de 40kHz, e o rebentamento demora $t_b = 3 \times 10^{-2} \text{ ms}$.

- B.3** Encontre o raio a e a espessura h da película de champagne que separa a bolha da atmosfera. 1.1pt

Parte C. Abrir champagne

Numa garrafa, a quantidade total de CO_2 é $n_T = 0.2 \text{ mol}$, estando esta ou dissolvida no volume líquido $V_L = 750 \text{ mL}$ do *champagne*, ou como gás no volume $V_G = 25 \text{ mL}$ debaixo da rolha (**Fig. 6.**, esquerda). V_G contém apenas CO_2 . O equilíbrio entre ambas as fases de CO_2 segue a lei de Henry. Assume-se que a rápida expansão gasosa de CO_2 quando a a garrafa é aberta é adiabática e reversível. A temperatura ambiente T_0 e pressão ambiente $P_0 = 1 \text{ bar}$ são ambas constantes.

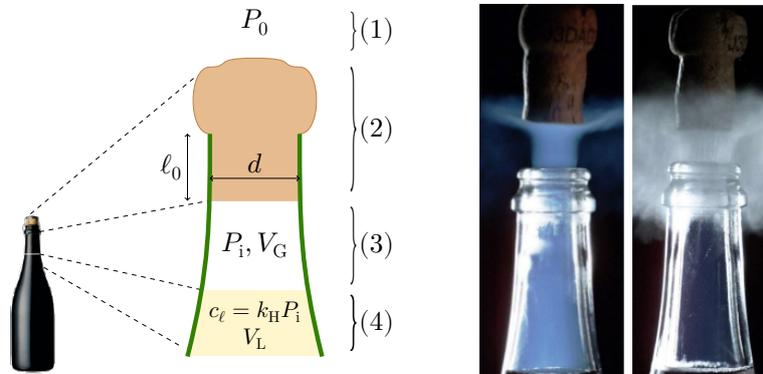


Fig. 6. *Esquerda:* gargalo típico (1) ar circundante, (2) rolha, (3) espaço com gás, (4) *champagne* líquido. *Direita:* Dois fenómenos observados durante a abertura da garrafa a duas temperaturas diferentes (adaptado de [2]).

C.1 Obtenha o valor numérico da pressão P_i de CO_2 gasoso na garrafa quando $T_0 = 6^\circ\text{C}$ e quando $T_0 = 20^\circ\text{C}$. 0.4pt

Outro passo na produção de *champagne* (não descrito aqui) leva aos seguintes valores de P_i que serão usados nas seguintes perguntas: $P_i = 4.69$ bar a $T_0 = 6^\circ\text{C}$ e $P_i = 7.45$ bar a $T_0 = 20^\circ\text{C}$.

Durante a abertura da garrafa podem ser observados dois fenómenos diferentes, dependendo de T_0 (**Fig. 6.** direita).

- ou aparece uma névoa azul, por formação de cristais sólidos de CO_2 (mas sem condensação da água);
- ou surge uma névoa cinzento-branco, devido à condensação do vapor de água no ar que rodeia o gargalo. Neste caso não se verifica a formação de cristais de CO_2 sólido.

A pressão de vapor de saturação $P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2}$ para a transição sólido/gás do CO_2 segue a equação $\log_{10}\left(\frac{P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2}}{P_0}\right) = A - \frac{B}{T+C}$, com T em K, $A = 6.81$, $B = 1.30 \times 10^3$ K e $C = -3.49$ K.

C.2 Escreva o valor numérico para T_f do gás de CO_2 no fim da expansão (i.e. após a abertura da garrafa) para o caso em que $T_0 = 6^\circ\text{C}$ e $T_0 = 20^\circ\text{C}$, se não ocorrer nenhuma transição de fase. Escolha quais das seguintes afirmações são verdadeiras (múltiplas opções possíveis): 0.7pt

1. Para $T_0 = 6^\circ\text{C}$ aparece uma névoa cinzenta e branca ao abrir a garrafa.
2. Para $T_0 = 6^\circ\text{C}$ aparece uma névoa azul ao abrir a garrafa.
3. Para $T_0 = 20^\circ\text{C}$ aparece uma névoa cinzenta e branca ao abrir a garrafa.
4. Para $T_0 = 20^\circ\text{C}$ aparece uma névoa azul ao abrir a garrafa.

Durante a abertura da garrafa, a rolha salta fora do gargalo. Vamos agora determinar a altura máxima H_c que ela atinge. Assume-se que a força de fricção F devido à acção do gargalo na rolha é dada por $F = \alpha A$, onde A é a área de contacto da rolha e α é uma constante a ser determinada. Inicialmente, a força devido à pressão supera ligeiramente a força de fricção. A massa da rolha é $m = 10$ g, o seu diâmetro é $d = 1.8$ cm e o comprimento da parte cilíndrica que está inicialmente presa no gargalo é $\ell_0 = 2.5$ cm. A partir do momento em que a rolha sai do gargalo a pressão da exaustão pode ser desprezada.

Theory



International
Physics Olympiad
FRANCE 2025

Q3-6

European Portuguese (Portugal)

C.3 Indique o valor numérico de H_c se a temperatura exterior for $T_0 = 6^\circ\text{C}$.

1.3pt

[1] Liger-Belair *et al*, Am. J. Enol. Vitic., Vol. 50, No. 3 (1999); [2] Liger-Belair *et al.*, Sc. Reports **7**, 10938 (2017).