Sociedade Portuguesa de Física

Olimpíadas de Física 2025

Seleção para as provas internacionais

Prova Teórica

Nome:____

Escola:____

31/maio/2025

Olimpíadas Internacionais de Física 2025

Seleção para as provas internacionais

Prova Teórica

Duração da prova: 4h

I Vários tópicos

1. Calcule a aceleração de um objeto que desliza sem atrito num plano inclinado com ângulo θ. Qual seria a aceleração de um cilindro que roda sem deslizar no mesmo plano?

2. Considere um gás ideal de coeficiente adiabático γ a uma pressão inicial P_1 e que é sujeito a uma expansão adiabática de um volume V_1 para um volume V_2 . Determine a pressão final e mostre que o trabalho realizado sobre o gás é dado por

$$W = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1}\left(\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1\right) .$$

3. Um possível ciclo realizado por este gás funciona com os seguintes processos:

   (a) a partir de um estado inicial $(P_1\ , V_1)$, o gás é arrefecido isobaricamente até $(P_1\ , V_2)$;

   (b) o gás é depois aquecido isocoricamente até $(P_2\ , V_2)$;

   (c) finalmente o gás sofre uma expansão adiabática de volta a$(P_1\ , V_1)$.

   Considerando que as capacidades térmicas são constantes, mostre que a eficiência térmica deste ciclo é dada por

$$\eta = 1 - \gamma\frac{(V_1/V_2) - 1}{(P_2/P_1) - 1} ,$$

   e calcule a variação de entropia do sistema em cada um dos 3 passos deste processo.

4. O pião ($m_\pi \simeq 140$ MeV/c^2) é uma partícula instável, decaindo num muão ($m_\mu \simeq 106$ MeV/c^2) e num neutrino ($m_\nu \simeq 0$) através do processo de interação fraca $\pi \to \mu + \nu$. Determine a energia do neutrino no referencial do laboratório, assumindo que a sua trajetória faz um ângulo de 0,015 rad com a direção inicial do pião, quando a energia deste é $E_\pi = 25$ GeV.

5. Um eletrão desloca-se para a frente e para trás a uma velocidade de módulo constante, paralela ao eixo dos xx, entre duas paredes localizadas a $x = 0$ e $x = L$. Considere que o comprimento de onda de de Broglie associado com o eletrão obedece à seguinte quantização $n\lambda = 2L$, onde $n = 1, 2, 3, \ldots$.

   (a) Obtenha a expressão para a velocidade v_n e para a energia E_n do eletrão no estado no estado estacionário número n.

   (b) Represente graficamente a trajetória periódica do eletrão no plano do momento linear, p, em função da posição, x.

   (c) Mostre que a área, A_n, dentro da trajetória que representou é dada por $A_n = nh$, onde h é a constante de Planck.

(d) Vamos generalizar este resultado para estimar a quantização da energia de um eletrão num potencial harmónico. Comece por escrever a energia de um oscilador harmónico com constante elástica k e massa m em função do momento linear, p, e da distância ao equilíbrio, x. Represente graficamente a trajetória periódica do oscilador no plano do momento linear, p, em função da posição, x. Escreva a amplitude e o máximo do momento linear em função da energia da partícula, E.

(e) Aplique a quantização da área envolvida pela trajetória, $A_n = nh$, para obter uma expressão para a energia E_n do eletrão no seu estado estacionário n.

6. A velocidade da luz num meio pode ser escrita em função do índice de refração: $v = c/n$, onde c é a velocidade da luz no vazio. Mostre que um raio de luz que entra num meio em que a velocidade da luz, v, diminui linearmente com a distância à superfície descreve uma trajetória circular. Relacione o raio da trajetória do raio de luz com a derivada de v em ordem à distância à superfície.

II Anéis!

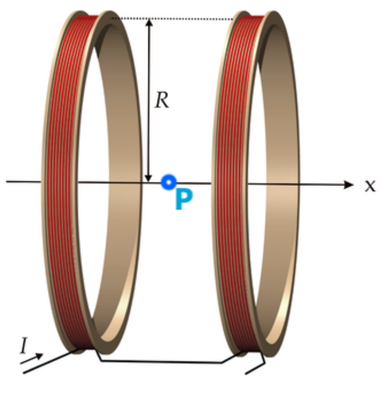
1. Considere um anel de raio R carregado com uma carga Q. Calcule o potencial eletrostático, $V(z)$, ao longo do eixo perpendicular ao plano do anel e que passa pelo seu centro.

2. Obtenha a frequência de oscilação de uma carga $-q$, de sinal oposto à carga do anel, com massa m, que se move na direção perpendicular ao plano de anel e que se encontra na vizinhança do centro do anel.

3. Mostre que a magnitude do campo magnético produzido por um anel de corrente I de raio R ao longo do seu eixo é igual a
$$B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} ,$$
onde z é a distância ao longo do eixo ao centro.

4. Calcule a percentagem de redução da magnitude do campo magnético produzido pelo anel de corrente às distâncias $z = R$ e $z = 2R$.

5. Considere dois anéis de corrente com N espriras cada um, a uma distância d entre eles e colocados paralelos um ao outro, como indicado na figura. Esta montagem é chamada de bobinas de Helmoltz e permite obter uma região alargada de campo magnético constante entre as bobinas.



Calcule o campo magnético a uma distância x do ponto P situado na linha que une os centros dos anéis e está equidistante entre os dois anéis.

6. Mostre que o campo magnético tem um máximo ao longo da linha que une os dois centros no ponto P.

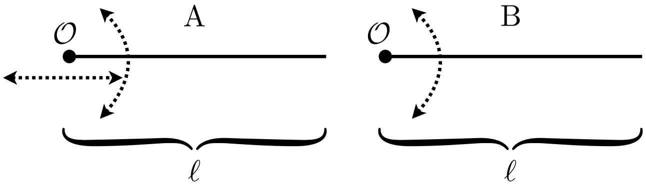
7. Calcule a distância entre os dois anéis que faz com que a segunda derivada do campo em relação a x no ponto P seja nula. Nessas condições calcule a variação percentual do campo magnético entre os dois anéis em relação ao seu máximo, ao longo do eixo que une os centros dos dois anéis.

8. Agora, na região entre os dois anéis é colocado um terceiro anel paralelo aos outros com raio $r = R/4$, resistência R_a e com uma capacidade C_a. Se a corrente nas bobinas for igual a $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$, qual será a corrente no terceiro anel. Justifique se esta corrente está atrasada ou adiantada em relação à força eletromotriz induzida no anel.

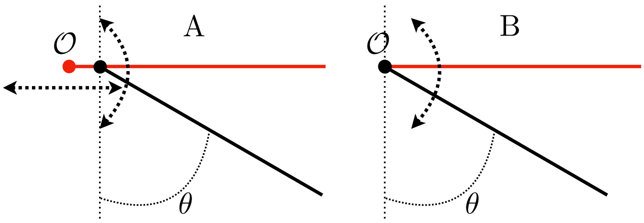
III Hastes ...

III.1 ... que caem

Duas hastes finas e uniformes (A e B) de comprimento (ℓ) e massa iguais (M) estão presas numa das suas extremidades ($\mathcal{O}$) a um carril horizontal. Qualquer das hastes pode rodar[1] livremente em torno da extremidade presa, num plano vertical que contém o carril horizontal. A extremidade presa da haste A pode mover-se *sem atrito* ao longo do carril, enquanto que a da haste B está fixa a um ponto do carril.



1. Cada haste é inicialmente mantida na posição horizontal e depois libertada suavemente. Obtenha a energia cinética de cada haste no instante em que as hastes estão inclinadas de um ângulo θ em relação à vertical e expresse-a apenas em função de M, ℓ, θ, ω_{A} ou ω_{B} (as velocidades angulares das hastes A e B, respetivamente) e, possivelmente, da componente horizontal da velocidade do centro de massa da haste.



2. Calcule a energia potencial de cada haste na situação da alínea anterior.

3. Determine a razão $\eta = \frac{\omega_{\mathrm{A}}}{\omega_{\mathrm{B}}}$ em função de θ.

4. Determine η no instante em que cada haste se encontra exatamente na posição vertical (isto é, quando $\theta = 0$).

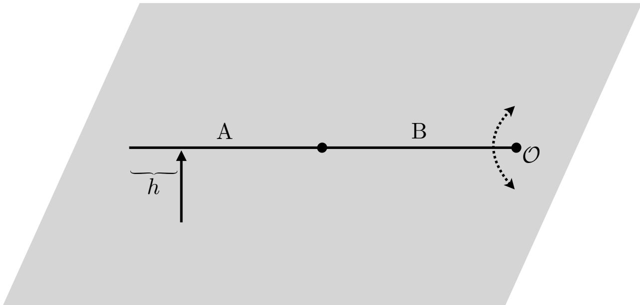
[1] O momento de inércia de uma haste fina e uniforme (de comprimento ℓ e massa M) em relação a um eixo transversal que passa pelo seu centro de massa é dado por

$$I = \frac{1}{12} M \ell^2 .$$

5. Determine a razão $\zeta = \frac{T_A}{T_B}$, onde T_A e T_B são, respetivamente, os períodos de pequena oscilação das hastes A e B em torno das suas posições verticais.

III.2 ... que são empurradas

As duas hastes são agora ligadas uma à outra por uma junta em torno da qual podem rodar sem atrito. São depois colocadas, alinhadas uma com a outra, sobre um plano horizontal onde podem deslizar sem atrito. A extremidade direita da haste B está presa a um ponto fixo ($\mathcal{O}$), em torno do qual a haste pode rodar livremente sem atrito. É dada uma tacada na haste A num ponto a uma distância $h < \ell$ da sua extremidade esquerda. A tacada é dada perpendicularmente à linha formada pelas duas hastes. Seja ΔP o impulso[2] transferido, quase instantaneamente, pela tacada para o sistema formado pelas duas hastes.



1. Obtenha uma relação entre o momento angular da haste B imediatamente após a tacada e o impulso da força que a haste A exerce sobre a haste B na junta de ligação.

2. Determine o momento linear da haste A imediatamente após a tacada.

3. Determine a velocidade angular da haste A, ω_1, a da haste B, ω_2, e a velocidade do centro de massa da haste A, v_1, logo após a tacada.

4. Determine o impulso transmitido à extremidade direita da haste B no instante em que o impacto ocorre.

5. Suponha que, após a tacada, as hastes começam a rodar em torno do ponto fixo $\mathcal{O}$, permanecendo alinhadas uma com a outra em linha reta. Onde deve ser dada a tacada para isto acontecer? Isto é, qual é o valor de h para o qual as hastes ficam a rodar "rigidamente"? Determine ω_0, a velocidade angular desta rotação.

[2] O impulso de uma força $\vec{F}$ que atua durante um intervalo de tempo Δt é dado por $\vec{I} = \vec{F}\Delta t = \Delta\vec{P}$.

Transformações de Lorentz

As variáveis x', y', z', t', E', p'_x, p'_y e p'_z correspondem às grandezas medidas num referencial que se desloca com velocidade $\vec{v} = v\hat{\imath}$ em relação ao referencial inicial. De acordo com as transformações de coordenadas, em $t = 0$ as origens dos dois referenciais são coincidentes.

$$E' = \frac{E - vp_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad p'_x = \frac{p_x - \frac{vE}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad p'_y = p_y \qquad p'_z = p_z$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad y' = y \qquad z' = z$$

Expressões potencialmente úteis

Se $x \ll 1$, $(1 + x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x$.

$$\sin(a) \pm \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a \pm b}{2}\right)\cos\left(\frac{a \mp b}{2}\right)$$

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a + b}{2}\right)\cos\left(\frac{a - b}{2}\right)$$

$$\cos(a) - \cos(b) = 2\sin\left(\frac{a + b}{2}\right)\sin\left(\frac{a - b}{2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{[(a - x)^2 + b^2]^{3/2}} = \frac{x - a}{b^2\sqrt{b^2 + (a - x)^2}}$$

$$C_V = \frac{5}{2}nR \quad \text{para um gás diatómico}$$

Constantes Físicas

e	$1{,}602176487\times10^{-19}$ C
N_A	$6{,}02214179\times10^{23}$ mol^{-1}
k_B	$1{,}3806504\times10^{-23}$ J·K^{-1}
ε_0	$8{,}854187817\times10^{-12}$ F·m^{-1}
c	299792458 m/s
G	$6{,}67428\times10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2}
h	$6{,}62606896\times10^{-34}$ J·s
$\hbar$	$1{,}054571628\times10^{-34}$ J·s
σ	$5{,}670400\times10^{-8}$ W·m^{-2}K^{-4}
Constante de Wien	$2{,}8977685\times10^{-3}$ m·K
κ_{gelo}	2,4 W K^{-1}m^{-1}
$L_{\text{gelo-água}}$	$3{,}3\times10^{5}$ J/kg
R	8,314 kg m^{2}s^{-2}K^{-1}mol^{-1}
1 atm	101325 Pa
a_0	$0{,}52917720859\times10^{-10}$ m
u	$1{,}660538782\times10^{-27}$ kg
u	931,494028 MeV/c^2
m_e	$9{,}10938215\times10^{-31}$ kg
m_e	510,998910 keV/c^2
m_e	$5{,}4857990943\times10^{-4}$ u
m_p	938,272013 MeV/c^2
m_n	939,565346 MeV/c^2
m_α	3727,379109 MeV/c^2
M_{Lua}	$7{,}3477\times10^{22}$ kg
R_{Lua}	$1{,}737\times10^{6}$ m
M_{Terra}	$5{,}97219\times10^{24}$ kg
$M_\odot$	$1{,}98855\times10^{30}$ kg
$M_\odot \frac{G}{c^2}$	1,48 km
1 pc	3,2616 anos-luz
1 pc	$3{,}086\times10^{16}$ m