



SOCIEDADE PORTUGUESA DE FÍSICA

## Olimpíadas de Física 2019

Seleção para as provas internacionais

Prova Teórica

Nome: \_\_\_\_\_

Escola: \_\_\_\_\_

25/maio/2019

## Prova Teórica

Duração da prova: 4h

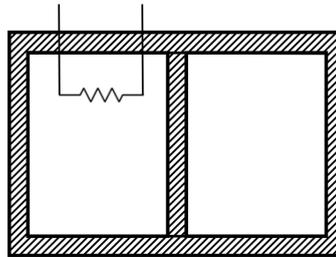
### I Vários tópicos

- Os electrões livres no interior de um metal podem ser aproximadamente descritos por uma onda plana da forma  $\Psi(x,t) = A \cos(kx - \omega t)$ . Trata-se naturalmente de uma descrição muito aproximada, que nem tem em conta o potencial electrostático no interior do metal, nem descreve adequadamente o comportamento na superfície dos metais. Neste contexto, é comum separar a superfície do interior maciço (*bulk*) do metal, adoptando para as ondas planas no interior maciço as chamadas *condições de fronteira periódicas*:

$$\Psi(x + L) = \Psi(x) \quad (1)$$

em que  $L$  é o comprimento do pedaço de metal.

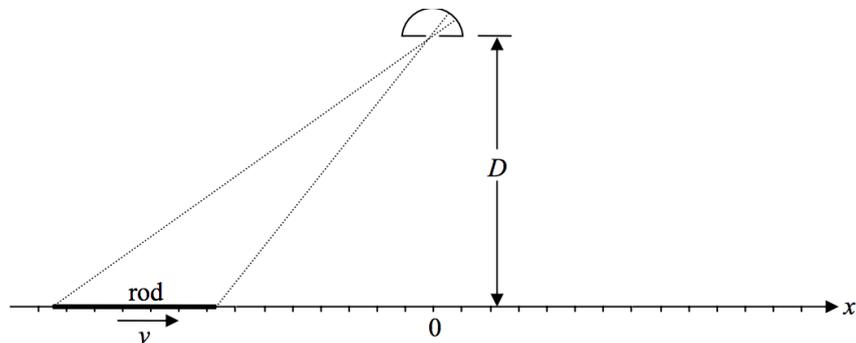
- Verifica que, neste modelo, os números de onda,  $k$ , possíveis para os electrões livres, se encontram quantizados;
  - Obtém as energias correspondentes e representa os níveis de energia em função de  $k$ ;
  - Calcula a velocidade de fase  $\omega/k$  e compara com a velocidade do electrão,  $v = p/m$ ;
  - Calcula a velocidade de grupo  $d\omega/dk$  e compara com  $p$ . Comenta.
- A um estudante de Física foi lançado o desafio de aumentar a temperatura de um gás raro e caro (Xénon), contido num recipiente fechado fazendo os possíveis por não contaminar a sua preciosa amostra de gás. Depois de pensar algum tempo, tirou partido do facto de ter estado com muita atenção nas aulas de termodinâmica, e propôs a seguinte solução:



No lado esquerdo da caixa da figura, com um volume  $V_0$ , coloca Árgon, um gás raro económico, e no lado direito o mesmo número de moles de fantástico Xénon. A parede de separação entre as duas partes pode mover-se livremente, sem atrito (as paredes exteriores são rígidas, e todas as paredes são **adiabáticas**). Inicialmente a pressão e a temperatura ( $P_0$  e  $T_0$ ) eram iguais nos dois lados, mas depois o estudante liga uma bateria à resistência elétrica do lado esquerdo e mantém a ligação até a pressão desse lado **triplicar** o seu valor inicial. Determine, em função dos dados do problema:

- (a) A pressão, volume e temperatura finais (após desligar a corrente na resistência) nos dois lados da caixa;
- (b) O trabalho realizado pelo gás do lado esquerdo sobre o gás do lado direito;
- (c) A variação de energia interna do gás de cada um dos lados e o calor fornecido pela resistência elétrica. Considere que os dois gases se comportam como **gases ideais monoatômicos**.

3. Uma barra que tem comprimento  $L$  quando está em repouso desloca-se a uma velocidade  $v$  relativista e constante na direção do eixo dos  $xx$ , tal como mostra a figura. A certo instante uma máquina fotográfica num laboratório espacial tira uma fotografia da barra.



- (a) Quando a fotografia é revelada, verifica-se que um determinado pedacinho da barra é fotografado na posição  $x'$ . Escreva  $x'$  em função da posição  $x$  em que se encontra esse mesmo pedacinho da barra no instante em que a fotografia foi tirada.
- (b) Qual é o comprimento da barra no referencial do laboratório?
- (c) Considere que no instante em que o centro da barra está na posição  $x_0$ , é tirada uma fotografia. Qual é o comprimento da barra nessa fotografia?
- (d) Considere que a barra tem massa  $m = 10$  g e que partindo do repouso se pretende que atinja a velocidade de  $v = 0.8c$ . Sabendo que no referencial do laboratório é aplicada uma força constante de 100 N, quanto tempo é que demoraria à barra para atingir a velocidade pretendida?

Nota:  $F = dp/dt$  e  $\int \frac{dv}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} = \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

4. Um sistema óptico é constituído por duas lentes delgadas convergentes de distâncias focais  $f_1 = 10$  cm e  $f_2 = 20$  cm, respetivamente.

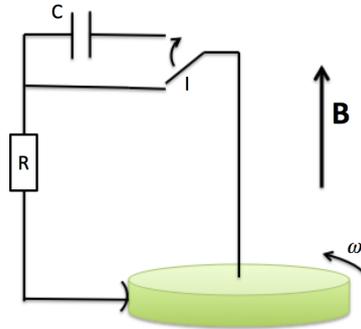
- (a) A que distância se devem colocar e qual deve funcionar como ocular, de modo a que possam ser usadas como um telescópio? Qual é a ampliação deste telescópio?
- (b) Se as colocar à distância  $d = 40$  cm, caracterize a imagem formada por este sistema de um objeto colocado do lado da lente 1 e à distância  $s_1 = 30$  cm. Trace o diagrama de raios.

5. Um fio de massa desprezável é enrolado em torno de um cilindro de massa  $M$ , raio  $R$  e momento de inércia para rotação em torno do seu eixo  $I = \frac{1}{2}MR^2$ . Na extremidade livre do fio é suspenso um corpo de massa  $m$  que é deixado cair no instante  $t = 0$ . O cilindro pode rodar livremente, com atrito desprezável, em torno do seu eixo.

- (a) Determinar a velocidade angular do cilindro e a energia cinética do conjunto no instante  $t$ .
- (b) Considere agora que a massa do fio não é desprezável. Supondo que o fio está inicialmente todo enrolado em torno do cilindro, numa só camada, a velocidade angular do cilindro dependerá da quantidade de fio que se tiver entretanto desenrolado. Obter uma expressão para a velocidade angular do cilindro em função da quantidade de fio desenrolado. Considerar que o fio tem comprimento total  $\ell$ , massa  $m$ , e que o centro de massa da porção por desenrolar se encontra sempre sobre o eixo do cilindro.

## II Cargas em Movimento

Um disco cilíndrico metálico, de massa  $m$  e raio  $a$ , é mantido com um pequeno motor a andar à roda com velocidade angular  $\omega$  constante sob influência de um campo magnético uniforme paralelo ao seu eixo de rotação. Considere que inicialmente o interruptor  $I$  não liga o condensador ao circuito e despreze o atrito.

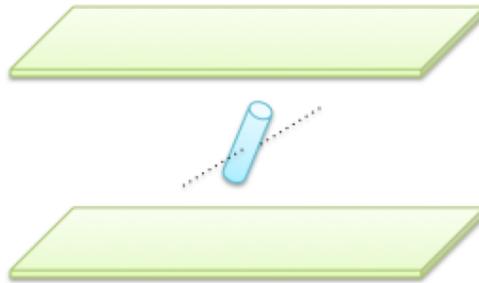


1. Explique porque é produzida uma corrente induzida no circuito.
2. Calcule o valor da corrente que atravessa a resistência.
3. Se a  $t = 0$  o motor for desligado, a velocidade angular do disco irá diminuir. Determine  $\omega(t)$  nesta situação.
4. Qual é a expressão para o tempo característico que leva a travagem do disco? Mostre por análise dimensional que a expressão que indicou representa efetivamente um tempo.
5. Ligando o interruptor, e introduzindo o condensador no circuito, obtenha a expressão para  $\omega(t)$ .

Considere um pequeno cilindro não condutor de raio  $r$ , comprimento  $\ell$  e massa  $m$ . Este cilindro tem uma densidade volúmica de carga dada por  $\rho(z) = \rho_0 z$ , onde  $z$  se refere à coordenada na direção longitudinal do cilindro, tendo como origem o centro de massa do cilindro.

6. Sabendo que para um dipolo elétrico de cargas  $+q$  e  $-q$  situadas a uma distância  $d$  se pode definir o momento dipolar elétrico,  $\vec{p}$ , como sendo um vetor alinhado com o dipolo, com o sentido da carga negativa para a positiva, e com o módulo  $p = qd$ , calcule o momento dipolar elétrico correspondente à distribuição de cargas deste cilindro.
7. Calcule o campo elétrico  $E(z)$  num ponto do eixo dos  $zz$  tal que  $z \gg \ell \gg r$ . Expresse este campo elétrico em função do momento dipolar elétrico do cilindro.

De seguida o cilindro é colocado a oscilar em torno de um eixo que passa pelo seu centro de massa entre as placas de um condensador, tal como mostra a figura.



8. Calcule a frequência de pequenas oscilações do cilindro em torno do eixo em função da diferença de potencial entre as placas do condensador e da área das placas do condensador. Não considere o campo gravítico nem o efeito das cargas do cilindro na distribuição de cargas no condensador.

### III Elevador Espacial

Atualmente os foguetões são a única maneira viável de transportar material da Terra para a Lua, Marte ou qualquer outro local extra-terrestre. Mas este método não é muito eficiente, visto ser necessário, em cada lançamento, vencer “por completo” a atração gravitacional da Terra. Um método mais eficiente foi proposto em 1895 por Konstantin Tsiolkovsky, um dos pioneiros da aventura espacial (e dos foguetões...). A ideia de Tsiolkovsky foi construir uma torre cujo topo ficasse à altitude a que os satélites se encontram em órbita geo-estacionária (órbita de um satélite síncrono com o movimento de rotação da Terra). Desse modo qualquer objeto transportado até ao topo da torre e daí largado horizontalmente ficaria em órbita geo-estacionária. A ideia foi reformulada em 1959 por Yuri N. Artsutanov, que propôs substituir a torre por uma plataforma ligada à Terra por um cabo e colocada a uma altitude superior à das órbitas geo-estacionárias. O transporte de satélites até à plataforma seria feito por um elevador que subiria até esta pelo cabo. No caso de uma plataforma de grande dimensão, como a Estação Espacial, por exemplo, seria mesmo possível lançar missões extra-terrestres a partir desta, com um custo energético consideravelmente menor que o lançamento a partir da superfície da Terra. Esta plataforma funcionaria como um contrapeso que manteria o cabo tensionado, como um pêndulo invertido (com a massa dirigida para longe da Terra). O equilíbrio de toda a estrutura resultaria do balanço entre a atração gravitacional (mais intensa na base), a força centrífuga (mais intensa no contrapeso) e as forças de tensão ao longo do cabo. A análise do problema feita por Jerome Pearson em 1975 mostrou que o cabo teria de ser feito de um material simultaneamente mais leve e mais forte que qualquer material conhecido. A ideia tornou-se, no entanto, bastante popular na ficção científica, nomeadamente nalguns romances de Arthur C. Clarke e Robert A. Heinlein. Com o aparecimento de novos materiais, a possibilidade de construção de um Elevador Espacial tornou-se real. Neste problema vai investigar vários aspetos da construção e utilização de uma estrutura deste tipo.

#### Dados:

- massa da Terra:  $M = 5,98 \times 10^{24}$  kg

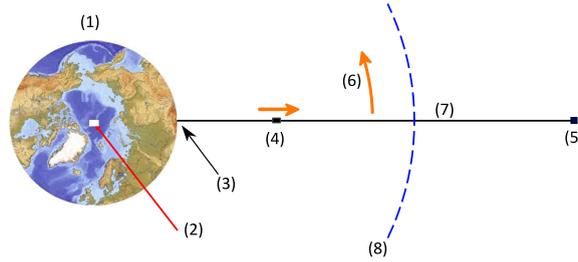


Figura 1: Elevador espacial (adaptado da Wkipedia): (1) Terra, (2) Pólo Norte, (3) Ponto de ancoragem sobre o Equador, (4) Elevador, (5) Contrapeso, (6) Rotação síncrona com a Terra, (7) Cabo, (8) Altitude das órbitas geo-estacionárias.

- raio equatorial da Terra:  $R = 6370 \text{ km}$
- massa do Sol:  $M_{\text{S}} = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$
- raio orbital médio da Terra em torno do Sol:  $R_{\odot} = 1,5 \times 10^8 \text{ km} = 1 \text{ AU}$  (unidade astronómica)
- velocidade orbital da Terra:  $30,9 \text{ km/s}$
- velocidade de rotação da Terra em torno do seu eixo:  $\omega = 7,27 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$

### III.1 Órbita Geoestacionária

1. Determine o raio  $R_{\text{G}}$  da órbita de um satélite que, visto de um ponto fixo da Terra, aparente não se mover, isto é, que se encontre numa órbita perfeitamente síncrona com o movimento de rotação da Terra.
2. Um observador estacionário sobre a Terra que estude o movimento deste satélite não se “apercebe” do seu próprio movimento de rotação, tendo por isso necessidade de introduzir uma força de inércia (que é uma força fictícia) para explicar porque é que o satélite, estando aparentemente parado sobre a sua cabeça, não cai para a Terra por ação da força gravitacional. Obtenha uma expressão para esta força, dita centrífuga.

### III.2 Elevador Espacial: cabo cilíndrico de raio constante

Comece por considerar que o cabo do elevador é homogéneo (com densidade  $\rho$ ) e que é um fio cilíndrico com uma secção uniforme  $A$ . O cabo é colocado verticalmente no equador. O comprimento do cabo é tal que a sua extremidade superior se encontra acima de  $R_{\text{G}}$ . O cabo está em tensão ao longo de todo o seu comprimento, sendo o valor local da tensão o que garante que cada elemento do cabo esteja em equilíbrio sob a ação combinada das forças gravitacional, centrífuga e de tensão.

1. Mostre que a tensão  $T(r) = A\sigma(r)$  num ponto do cabo a uma distância  $r$  do centro da Terra varia de acordo com

$$\frac{d\sigma(r)}{dr} = GM\rho \left( \frac{1}{r^2} - \frac{r}{R_{\text{G}}^3} \right).$$

Sugestão: considere um segmento infinitesimal do cabo e faça o estudo de todas as forças que atuam sobre ele: gravitacional, centrífuga, tensão exercida pelo segmento de cabo imediatamente acima e tensão exercida pelo segmento de cabo imediatamente abaixo.

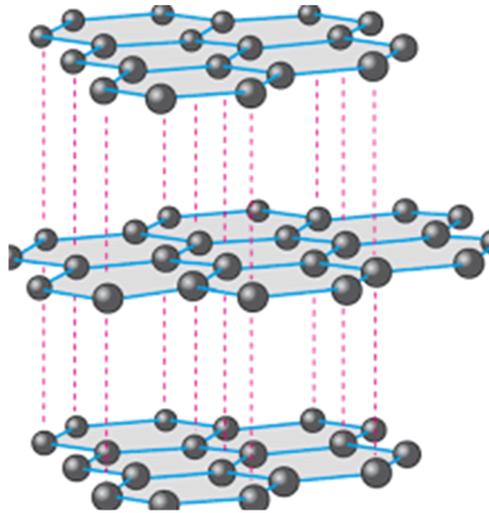


Figura 2: Estrutura da grafite.

2. A tensão na base e no topo do cabo tem de ser nula. Porquê?
3. Calcule o comprimento do cabo.
4. Determine a distância do centro da Terra ao ponto onde é máxima a tensão no cabo.
5. Encontre a expressão para a tensão máxima no cabo em função de  $\rho$ ,  $R_G$ ,  $R$  e da aceleração da gravidade,  $g$ .
6. Se o cabo for de aço, cuja densidade é  $\rho = 7900 \text{ kg/m}^3$  e cujo limite de resistência à tração (tensão máxima que um material pode suportar quando é esticado) é  $5,0 \text{ GPa}$ , determine a razão entre a tensão máxima no cabo e o limite de resistência à tração do aço.

### III.3 Nanotubos de carbono

A construção do Elevador Espacial obriga ao fabrico de um cabo com grande resistência à tração que seja também muito leve, visto que o peso do cabo contribui para a tensão a que este está sujeito. Os nanotubos de carbono satisfazem ambos os requisitos, visto serem formados por um elemento químico que estabelece ligações extremamente fortes e que é também um dos elementos mais leves da Tabela Periódica. As formas polimórficas naturais mais conhecidas do carbono são o diamante e a grafite. No diamante, cada átomo de carbono liga-se a quatro vizinhos próximos formando um tetraedro. Na grafite as ligações entre átomos de carbono são de dois tipos, pois a grafite tem uma estrutura em camadas. Numa mesma camada, cada átomo de carbono liga-se a três vizinhos próximos no mesmo plano, formando uma rede hexagonal. Esta ligação é mais forte que a ligação entre átomos de carbono no diamante. Mas a grafite não é um material mais duro que o diamante, visto que as ligações entre camadas de grafite são ligações de van der Waals, muito mais fracas que as ligações covalentes no diamante ou entre os átomos de uma mesma camada de grafite.

Uma camada mono-atômica de grafite designa-se por **grafeno**. Isolado, o grafeno não é estável e tende a enrolar-se formando esferas ou tubos de carbono. A distância entre dois átomos vizinhos no grafeno é  $a = 0,142 \text{ nm}$  e a distância entre duas ligações paralelas vizinhas é  $b = 0,246 \text{ nm}$  (ver figura 3). Como as ligações covalentes entre os átomos do grafeno são particularmente fortes, uma folha de grafeno enrolada (um nanotubo) tem propriedades mecânicas muito especiais. Tanto o seu

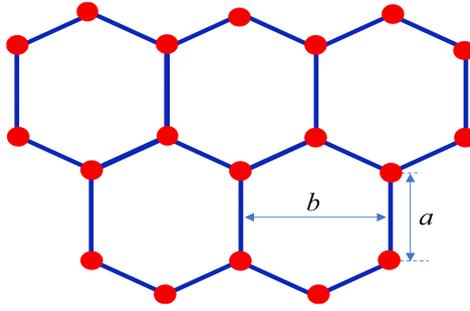


Figura 3: Estrutura do grafeno.

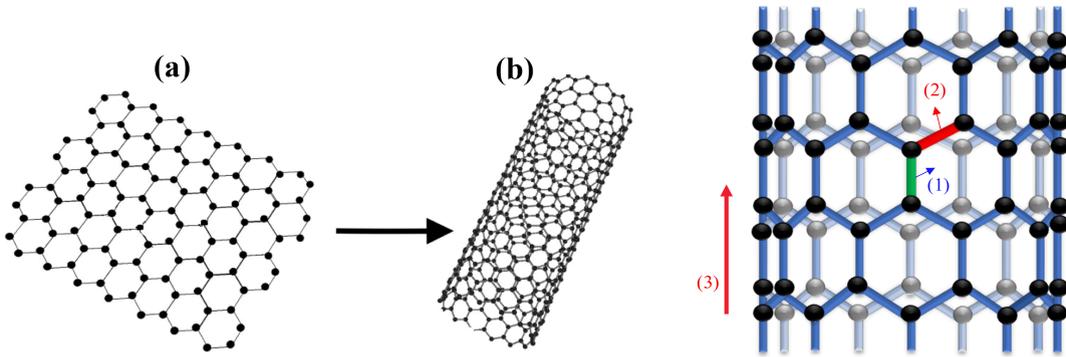


Figura 4: Esquerda: (a) grafeno e (b) nanotubo. Direita: ligações paralelas (1) ao eixo de um nanotubo (3) e ligações não paralelas ao eixo (2).

módulo de Young (razão entre tensão aplicada e alongação relativa na direção da tensão aplicada) como o seu limite de resistência à tração são bastante altos, embora o material seja extremamente leve.

Vamos agora examinar algumas propriedades mecânicas de um nanotubo de carbono com um diâmetro tal que existem 27 ligações carbono-carbono paralelas ao eixo do tubo. A título de exemplo, considere a figura 4. Nessa figura está indicada a verde uma ligação paralela ao eixo do tubo ((1) na figura da direita). Se contar as ligações paralelas a essa, *na mesma secção transversal do tubo*, concluirá que o tubo da figura tem um diâmetro tal que admite 9 ligações paralelas. A ligação química entre dois átomos de carbono pode ser descrita pelo potencial de Morse

$$V(x) = V_0 \left( e^{-4\frac{x}{a}} - 2e^{-2\frac{x}{a}} \right), \quad (2)$$

onde  $V_0 = 4,93$  eV e  $a = 0,142$  nm, que é a distância entre dois átomos vizinhos no grafeno. Esta distância representa por isso a distância entre átomos no equilíbrio, sendo  $x$  uma medida do afastamento dos átomos em relação a essa posição de equilíbrio. Assim, quando  $x = 0$ ,  $V = -V_0$ , o que permite identificar  $V_0$  com a energia de ligação dos dois átomos. De aqui em diante vamos desprezar todas as interações entre átomos de carbono que não sejam vizinhos próximos. Quando o tubo é comprimido ou esticado,  $x \neq 0$ , sendo  $\Delta V = V(x) - V(x = 0)$  o acréscimo de energia potencial devido ao afastamento da posição de equilíbrio. Vamos ignorar as alterações nos ângulos de ligação que resultam da compressão ou dilatação do tubo.

1. Para pequenas compressões ou dilatações, a ligação entre átomos de carbono pode ser descrita

como se os átomos estivessem ligados por pequenas molas de constante elástica  $k$ . Nesse caso  $V(x) \approx P + Qx^2$ . Determine  $P$  e  $Q$  em função de  $a$  e  $V_0$ .

2. Calcule o valor da constante elástica  $k$ .
3. Calcule o valor do módulo de Young do nanotubo de carbono.
4. Para estimar o limite de resistência à tração, podemos assumir que  $x_{\max}$ , a extensão máxima da “mola” que interliga dois átomos de carbono, ocorre quando a energia potencial elástica tem um valor igual à energia de ligação dos dois átomos,  $V_0$ . Determine  $x_{\max}$ .
5. Estime o limite de resistência à tração,  $\sigma_0$ , do nanotubo de carbono.
6. Sabendo que a massa molar do carbono é 12 g, estime a densidade do nanotubo de carbono.

### III.4 Elevador Espacial com cabo de espessura variável

Se o cabo do Elevador Espacial tiver secção constante, a tensão varia ao longo do cabo, como já vimos. Pode, no entanto, ser vantajoso variar a secção do cabo de modo a que a tensão  $\sigma$  e a densidade de massa  $\rho$  se mantenham constantes<sup>1</sup> ao longo de todo o cabo. Designe por  $A_S$  a secção transversal do cabo à superfície da Terra, no ponto de ancoragem do elevador, e por  $A_G$  a secção transversal do cabo à altitude das órbitas geo-estacionárias.

1. Determine a secção transversal  $A(h)$  em função da altura  $h$  relativamente ao solo.
2. Se o cabo for construído simetricamente, de modo a que a secção transversal em ambas as extremidades seja a mesma, determine a distância entre a extremidade do cabo mais afastada da Terra e o centro da Terra.
3. Determine a razão  $A_G/A_S$  para um cabo construído com nanotubos de carbono de limite de resistência à tração 130 GPa e densidade  $1300 \text{ kg/m}^3$ .
4. É possível encurtar consideravelmente o cabo se se prender um contrapeso à extremidade mais afastada da Terra. Determine a relação entre a massa desse contrapeso,  $m_C$ , e a extensão de cabo para além da altitude das órbitas geo-estacionárias,  $h_C$ .

### III.5 Aplicações

A principal vantagem do Elevador Espacial é a possibilidade de aproveitar a energia cinética de rotação da estrutura para colocar satélites em órbita ou mesmo lançar naves para outros planetas. É muito simples: basta transportar no elevador a carga que se quiser lançar e largá-la do repouso quando se atingir a altitude adequada para o lançamento pretendido. Para simplificar os cálculos, assumamos que o Elevador Espacial é construído de tal maneira que o cabo fica no plano da órbita da Terra em torno do Sol.

1. Determine a altura crítica,  $r_c$ , medida a partir do centro da Terra, a que um objeto deve ser largado do elevador para que escape da atração gravitacional da Terra.

---

<sup>1</sup>Repare que os átomos de carbono se aproximam uns dos outros, aumentando a densidade do cabo, quando o nanotubo é comprimido.

2. Só será necessário construir um cabo com um comprimento superior a  $r_c - R$  se se pretender lançar naves para outros planetas. Se o cabo tiver um comprimento tal que a sua extremidade longínqua esteja a 107000 km do centro da Terra, qual é a distância mínima ao Sol que uma nave largada em repouso do topo do elevador pode atingir? E qual é a distância máxima? Apresente as respostas em unidades astronómicas.