

## Instruções gerais: Exame Teórico (30 pontos)

O exame teórico dura 5 horas e vale 30 pontos.

### Antes do exame

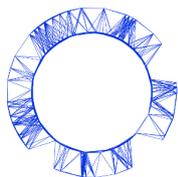
- Não deves abrir os envelopes que contém os problemas antes do sinal sonoro que indica o início da competição.
- O início e o final do exame serão indicados por um sinal sonoro. Haverá um anúncio a cada hora indicando o tempo decorrido, assim como quinze minutos antes do final do exame (antes do sinal sonoro final).

### Durante o exame

- São fornecidas folhas de respostas dedicadas para escreveres as tuas respostas. Insere os resultados nas tabelas, caixas ou gráficos apropriados na folha de respostas correspondente (marcada com A). Para cada problema, há folhas de trabalho adicionais em branco para realizar cálculos detalhados (marcadas com W). Certifica-te sempre que estás a usar as folhas de trabalho que pertencem ao problema no qual estás a trabalhar nesse momento (verifica o número do problema no cabeçalho). Se escreveste alguma coisa nalguma folha que não queres que seja classificada, faz uma cruz sobre ela. Usa somente a frente da frente de cada página.
- Nas tuas respostas, tenta ser o mais conciso possível: usa equações, operadores lógicos e desenhos para ilustrar os teus pensamentos sempre que possível. Evita o uso de frases longas.
- Por favor, usa um número apropriado de algarismos significativos ao apresentar resultados numéricos.
- Muitas vezes podes resolver partes posteriores de um problema sem ter resolvido as anteriores.
- Na próxima página é dada uma lista de constantes físicas.
- Não tens permissão para sair do teu local de trabalho sem permissão. Se precisares de alguma ajuda (precisares de encher a tua garrafa de água potável, a calculadora avariou, precisas de ir à casa de banho, etc), por favor, chama a atenção de um guia de equipa levantando uma das três bandeiras: "H<sub>2</sub>O" para reabastecer a garrafa de água, "WC", se precisares de ir à casa de banho, ou "Help!" em todos os outros casos. Se precisares de mais folhas de trabalho ou para gráficos, por favor levanta a bandeira "Help!".

### No final do exame

- No final do exame, deves parar imediatamente de escrever.
- Para cada problema, classifica as folhas correspondentes na seguinte ordem: folha de rosto (C), perguntas (Q), folhas de resposta (A), folhas de trabalho (W).
- Coloca todas as folhas pertencentes a um problema no mesmo envelope. Coloca as instruções gerais (G) no envelope separado restante. Entrega também as folhas vazias. Não podes levar nenhuma folha de papel da área do exame.
- Espera na tua mesa até que os teus envelopes sejam recolhidos. Assim que todos os envelopes forem recolhidos, o teu guia irá acompanhar-te para fora da área do exame. Leva o teu saco de equipamentos de escrita contigo. Leva o equipamento de escrita (1 caneta esferográfica, 1 lápis, 1 régua, 1 borracha/afiadeira), bem como a calculadora contigo. Leva também a tua garrafa de água.



## LIGO-GW150914 (10 pontos)

Em 2015, o observatório de ondas gravitacionais LIGO detetou, pela primeira vez, a passagem das ondas gravitacionais (GW) pela Terra. Este evento, denominado GW150914, foi desencadeado por ondas produzidas por dois buracos negros que orbitavam em órbitas quase circulares. Este problema vai-te fazer estimar alguns parâmetros físicos do sistema, a partir das propriedades do sinal detectado.

### Parte A: Órbitas newtonianas (conservativas) (3.0 pontos)

- A.1** Considere um sistema de duas estrelas com massas  $M_1, M_2$ , em posições  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ , 1.0pt  
respetivamente, no referencial do centro de massa do sistema, isto é,

$$M_1 \vec{r}_1 + M_2 \vec{r}_2 = 0. \quad (1)$$

As estrelas estão isoladas do resto do Universo e movem-se com velocidades não relativísticas. Usando as leis de Newton, o vetor aceleração da massa  $M_1$  pode ser expressa como

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\alpha \frac{\vec{r}_1}{r_1^n}, \quad (2)$$

onde  $r_1 = |\vec{r}_1|, r_2 = |\vec{r}_2|$ . Determinar  $n \in \mathbb{N}$  e  $\alpha = \alpha(G, M_1, M_2)$ , onde  $G$  é a constante de Newton [ $G \simeq 6.67 \times 10^{-11} \text{N.m}^2\text{Kg}^{-2}$ ].

- A.2** A energia total do sistema de 2 massas, com órbitas circulares, pode ser ex- 1.0pt  
pressa como:

$$E = A(\mu, \Omega, L) - G \frac{M\mu}{L}, \quad (3)$$

onde

$$\mu \equiv \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}, \quad M \equiv M_1 + M_2, \quad (4)$$

são a *massa reduzida* e a *massa total* do sistema,  $\Omega$  é a velocidade angular de cada massa e  $L$  é a separação total  $L = r_1 + r_2$ . Determinar explicitamente a expressão para o termo  $A(\mu, \Omega, L)$ .

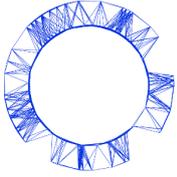
- A.3** Equação 3 pode ser simplificado por  $E = \beta G \frac{M\mu}{L}$ . Determinar o valor de  $\beta$ . 1.0pt

### Parte B: Introduzindo a dissipação relativística (7.0 pontos)

A teoria da gravidade correta, *Relatividade Geral*, foi formulada por Einstein em 1915, e prevê que a gravidade propaga-se à velocidade da luz. Os mensageiros que transportam informação sobre a interação são chamados GWs. Os GWs são emitidos sempre que as massas são aceleradas, fazendo com que o sistema de massas reduza a sua energia.

Considerar um sistema de duas partículas pontuais, isoladas do resto do Universo. Einstein provou que, para velocidades suficientemente pequenas, os GWs emitidos: 1) têm uma frequência duas vezes superior à frequência orbital; 2) pode ser caracterizado por uma luminosidade, ou seja, potência emitida

## Theory



IPHO 2018  
Lisbon, Portugal

# Q1-2

Portugues (Portugal)

$\mathcal{P}$ , que é dominada pela fórmula do quadrupolo de Einstein,

$$\mathcal{P} = \frac{G}{5c^5} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left( \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right) \left( \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right). \quad (5)$$

Onde,  $c$  é a velocidade da luz  $c \simeq 3 \times 10^8$  m/s. Para um sistema de 2 partículas pontuais que orbitam no plano  $x - y$ ,  $Q_{ij}$  é dado pela tabela seguinte (os índices  $i, j$  são os números da linha/coluna)

$$Q_{11} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2x_A^2 - y_A^2), \quad Q_{22} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2y_A^2 - x_A^2), \quad Q_{33} = - \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (x_A^2 + y_A^2), \quad (6)$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \sum_{A=1}^2 M_A x_A y_A, \quad (7)$$

e  $Q_{ij} = 0$  para os restantes termos. Nas expressões  $(x_A, y_A)$  é a posição da massa  $A$  no referencial do centro de massa.

- B.1** Para as órbitas circulares descritas em A.2 as componentes de  $Q_{ij}$  podem ser expressas em função do tempo  $t$  como: 1.0pt

$$Q_{ii} = \frac{\mu L^2}{2} (a_i + b_i \cos kt), \quad Q_{ij}^{i \neq j} = \frac{\mu L^2}{2} c_{ij} \sin kt. \quad (8)$$

Determinar  $k$  em termos de  $\Omega$  e os valores numéricos das constantes  $a_i, b_i, c_{ij}$ .

- B.2** Calcular a potência  $\mathcal{P}$  emitida nas ondas gravitacionais para este sistema, e obter: 1.0pt

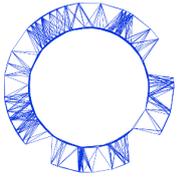
$$\mathcal{P} = \xi \frac{G}{c^5} \mu^2 L^4 \Omega^6. \quad (9)$$

Qual é o número  $\xi$ ? [Se não conseguiu obter  $\xi$ , use  $\xi = 6.4$  no que vem a seguir.]

- B.3** Na ausência de emissão de GW, as duas massas orbitarão, indefinidamente, em órbita circular fixa. No entanto, a emissão de GWs faz com que o sistema sofra perda de energia e evolua lentamente em direção a órbitas circulares menores. Demonstrar que a variação temporal da velocidade angular orbital  $\frac{d\Omega}{dt}$  é dada por: 1.0pt

$$\left( \frac{d\Omega}{dt} \right)^3 = (3\xi)^3 \frac{\Omega^{11}}{c^{15}} (GM_c)^5, \quad (10)$$

onde  $M_c$  é a chamada massa "chirp". Determinar  $M_c$  em função de  $M$  e  $\mu$ . Esta massa determina o aumento na frequência durante a redução do raio da órbita. [O nome "chirp" é inspirado pelo som de alta frequência (frequência crescente) produzido por pequenos pássaros.]



- B.4** Usando as informações fornecidas acima, relacione a velocidade angular orbital  $\Omega$  com a frequência GW  $f_{\text{GW}}$ . Sabendo isso, para qualquer função suave  $F(t)$  e  $a \neq 1$ , 2.0pt

$$\frac{dF(t)}{dt} = \chi F(t)^a \quad \Rightarrow \quad F(t)^{1-a} = \chi(1-a)(t-t_0), \quad (11)$$

onde  $\chi$  é uma constante e  $t_0$  é uma constante de integração, mostrar que (10) implica que a frequência GW é

$$f_{\text{GW}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3}\xi \left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{(2/3)+p} (t_0 - t)^{2-p} \quad (12)$$

e determinar a constante  $p$ .

Em 14 de setembro de 2015, o GW150914 foi registrado pelos detetores LIGO, que consistem de dois braços em forma de L, cada um com 4 km de comprimento. A variação do comprimento relativo destes braços variou de acordo com a Fig. 1. Os braços do detetor respondem linearmente a uma onda gravitacional e o padrão de resposta imita a onda. Esta onda foi criada por dois buracos negros com órbitas quase circulares; a perda de energia através da radiação gravitacional fez com que a órbita diminuísse e os buracos negros, eventualmente, colidissem. O ponto de colisão corresponde, grosso modo, ao pico do sinal após o ponto D, na Fig. 1.

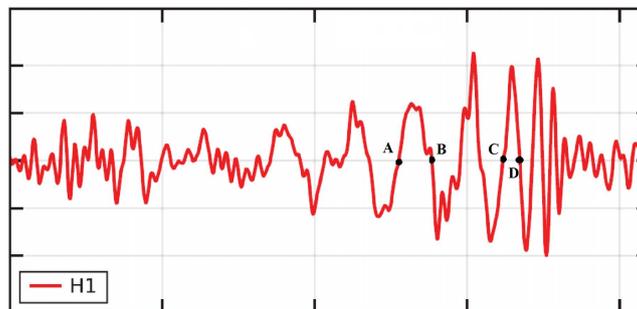


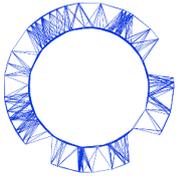
Figure 1. Deformação, isto é, variação relativa do tamanho de cada braço, no detetor H1 do LIGO. O eixo horizontal é o tempo, e os pontos A, B, C, D correspondem a  $t = 0.00, 0.009, 0.034, 0.040$  segundos, respetivamente.

- B.5** A partir da figura, estimar  $f_{\text{GW}}(t)$  nos instantes 1.0pt

$$t_{\overline{AB}} = \frac{t_B + t_A}{2} \quad \text{and} \quad t_{\overline{CD}} = \frac{t_D + t_C}{2}. \quad (13)$$

Assumindo que (12) é válido até à colisão (que estritamente falando não é verdade) e que os dois objetos têm massa igual, estimar a massa "chirp" e a massa total do sistema, em termos de massas solares  $M_{\odot} \simeq 2 \times 10^{30}$  kg.

## Theory



IPHO 2018  
Lisbon, Portugal

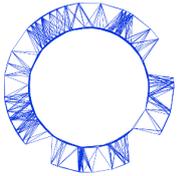
# Q1-4

Portugues (Portugal)

- B.6** Estimar a separação orbital mínima entre os dois objetos no instante  $t_{\text{CD}}$ . E 1.0pt  
assim, estimar um tamanho máximo para cada objeto,  $R_{\text{max}}$ . Obter  $R_{\odot}/R_{\text{max}}$   
e comparar este tamanho com o raio do nosso Sol,  $R_{\odot} \simeq 7 \times 10^5$  km. Estimar  
também a velocidade linear orbital no mesmo instante,  $v_{\text{col}}$ , comparando-a com  
a velocidade da luz,  $v_{\text{col}}/c$ .

Concluir que estes objetos, em verdade, movem-se extremamente rápido e são extremamente compactos!

# Theory



IPhO 2018  
Lisbon, Portugal

# A1-1

Portugues (Portugal)

## LIGO-GW150914 (10 pontos)

### Parte A: Órbitas newtonianas (conservativas) (3.0 pontos)

**A.1** (1.0 pt)

$n =$

$\alpha =$

**A.2** (1.0 pt)

$A(\mu, \Omega, L) =$

**A.3** (1.0 pt)

$\beta =$

### Parte B: Introduzindo a dissipação relativística (7.0 points)

**B.1** (1.0 pt)

$k =$

$a_1 =$

$a_2 =$

$a_3 =$

$b_1 =$

$b_2 =$

$b_3 =$

$c_{12} =$

$c_{13} =$

$c_{23} =$

$c_{21} =$

$c_{22} =$

$c_{23} =$

$c_{31} =$

$c_{32} =$

$c_{33} =$

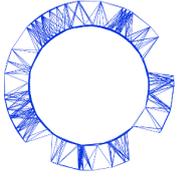
**B.2** (1.0 pt)

$\xi =$

**B.3** (1.0 pt)

$M_{\zeta} =$

# Theory



IPhO 2018  
Lisbon, Portugal

# A1-2

Portugues (Portugal)

**B.4** (2.0 pt)

$p =$

**B.5** (1.0 pt)

$M_c \simeq$

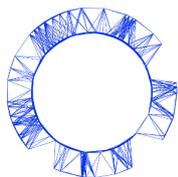
$M \simeq$

**B.6** (1.0 pt)

$L \simeq$

$\frac{R_\odot}{R_{\max}} \simeq$

$\frac{v_{\text{col}}}{c} \simeq$



## Onde está o neutrino?

Quando dois prótons colidem com uma energia muito elevada no Large Hadron Collider (LHC), podem ser produzidas várias partículas como resultado dessa colisão, como eletrões, muões, neutrinos, quarks e as suas respetivas antipartículas. A maioria dessas partículas pode ser registada pelo detetor de partículas que rodeia o ponto de colisão. Por exemplo, os quarks passam por um processo chamado hadronização, no qual dão origem a uma chuva de partículas subatómicas, designadas "jatos". Adicionalmente, o campo magnético elevado presente nos detectores permite que até mesmo partículas carregadas muito enérgicas curvem o suficiente para que seja determinado o seu momento linear (quantidade de movimento). O detetor ATLAS usa um solenoide supercondutor que produz um campo magnético constante e uniforme de 2,00 Tesla na parte interna do detetor, em torno do ponto de colisão. Partículas carregadas com um momento linear abaixo de um certo valor são curvadas tão fortemente que irão percorrer repetidamente o campo e, provavelmente, não serão medidas. Devido à sua natureza, o neutrino não é detetado, pois escapa através do detetor sem interagir.

Dados: Massa em repouso do eletrão,  $m = 9.11 \times 10^{-31}$  kg; Carga elementar,  $e = 1.60 \times 10^{-19}$  C;

Velocidade da luz,  $c = 3.00 \times 10^8$  m s<sup>-1</sup>; Permitividade do vazio,  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$  F m<sup>-1</sup>

### Parte A. Física do detetor ATLAS (4.0 pontos)

- A.1** Obtenha uma expressão para o raio de ciclotrão,  $r$ , da trajetória circular de um eletrão que sofre o efeito de uma força magnética perpendicular à sua velocidade, e exprima esse raio em função da sua energia cinética,  $K$ ; módulo da carga,  $e$ ; massa,  $m$ ; e campo magnético,  $B$ . Suponha que o eletrão seja uma partícula clássica não relativística. 0.5pt

Os eletrões produzidos dentro do detetor ATLAS devem ser tratados como partículas relativísticas. No entanto, a fórmula para o raio de ciclotrão também se aplica ao movimento relativístico quando é considerado momento linear relativístico.

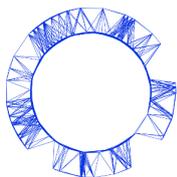
- A.2** Calcule o valor mínimo do momento linear de um eletrão que permita que ele escape da parte interior do detetor na direção radial. A parte interior do detetor tem uma forma cilíndrica, com um raio de 1,1 metros, e o eletrão é produzido no ponto de colisão, exatamente no centro do cilindro. Exprima a resposta em MeV/ $c$ . 0.5pt

Quando aceleradas perpendicularmente à sua velocidade, as partículas relativísticas de carga  $e$  e massa em repouso  $m$  emitem radiação electromagnética, designada radiação de sincrotrão. A potência emitida é dada por

$$P = \frac{e^2 a^2 \gamma^4}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

onde  $a$  é a aceleração e  $\gamma = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$ .

## Theory



IPHO 2018  
Lisbon, Portugal

# Q2-2

Portugues (Portugal)

- A.3** Uma partícula é chamada ultra-relativística quando a sua velocidade é muito próxima da velocidade da luz. Para uma partícula ultra-relativística, a potência emitida pode ser expressa como: 1.0pt

$$P = \xi \frac{e^4}{\epsilon_0 m^k c^n} E^2 B^2,$$

onde  $\xi$  é um número real,  $n, k \in \mathbb{Z}$  são inteiros,  $E$  é a energia da partícula carregada e  $B$  é o campo magnético. Determine  $\xi$ ,  $n$  e  $k$ .

- A.4** No limite ultra-relativístico, a energia do eletrão em função do tempo é: 1.0pt

$$E(t) = \frac{E_0}{1 + \alpha E_0 t},$$

onde  $E_0$  é a energia inicial do eletrão. Determine  $\alpha$  em função de  $e$ ,  $c$ ,  $B$ ,  $\epsilon_0$  e  $m$ .

- A.5** Considere o movimento de um eletrão, produzido no ponto de colisão, ao longo da direção radial com uma energia de 100 GeV. Estime quanta da energia é perdida devido à radiação de sincrotrão até que o eletrão deixe a parte interior do detetor? Dê a sua resposta em MeV. 0.5pt

- A.6** Obtenha uma expressão para a frequência de ciclotrão do eletrão em função do tempo no limite ultra-relativístico. 0.5pt

### Parte B. Descobrimo o neutrino (6.0 pontos)

A colisão entre os dois prótons mostrados na Figura 1 leva à produção de um quark top ( $t$ ) e um quark anti-top ( $\bar{t}$ ), as partículas elementares mais pesadas já detetadas. O quark top decai para um bóson  $W^+$  e um quark bottom ( $b$ ), enquanto o quark anti-top decai num bóson  $W^-$  e num quark anti-bottom ( $\bar{b}$ ). No caso representado na Figura 1, o bóson  $W^+$  decai num anti-muão ( $\mu^+$ ) e num neutrino ( $\nu$ ), e o bóson  $W^-$  decai num quark e num anti-quark. A tarefa deste problema é reconstruir o momento linear total do neutrino usando o momento linear de algumas partículas detetadas. **Por simplicidade, todas as partículas e jatos neste problema serão consideradas sem massa, exceto para o quark top e  $W^\pm$ .**

O momento linear dos produtos de decaimento do quark top podem ser determinados da experiência (ver Tabela), exceto a componente do momento linear do neutrino segundo a direção do eixo dos  $z$ . O momento linear total das partículas do estado final registadas pelo detetor é apenas nulo no plano transversal (plano  $xy$ ), e não ao longo da linha de colisão (eixo dos  $z$ ). Como tal, pode-se determinar o momento linear transversal do neutrino a partir do momento linear em falta no plano transversal.

Em 4 de junho de 2015, a experiência ATLAS no LHC registou uma colisão próton-próton às 00:21:24 GMT+1 como a representada na Figura 1.

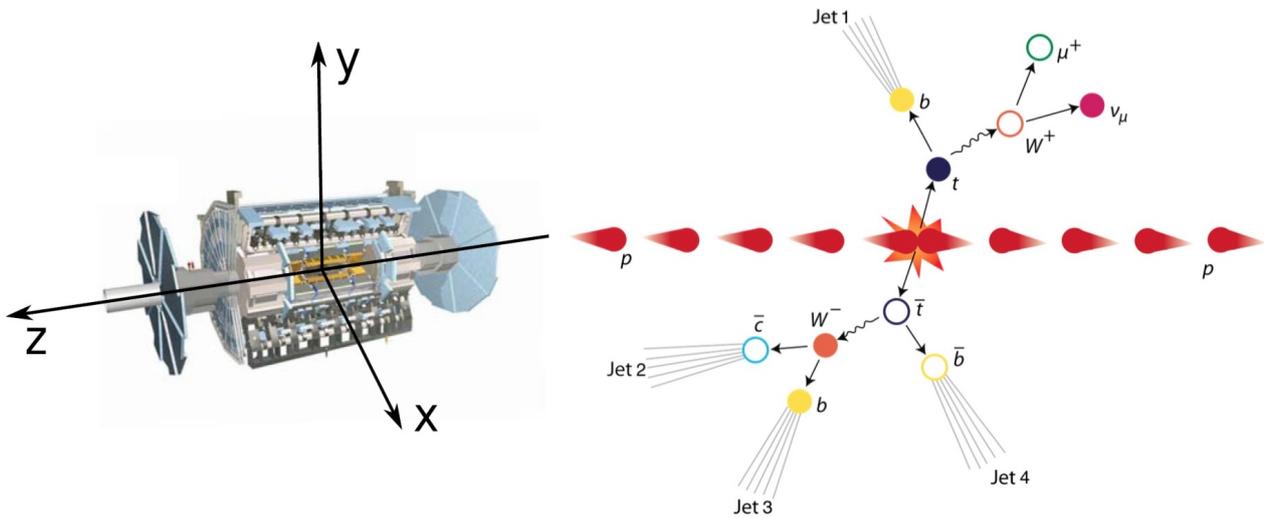
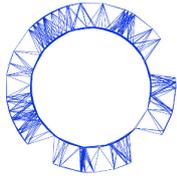


Figura 1. Representação esquemática do sistema de coordenadas do detetor ATLAS (à esquerda), e de uma colisão próton-próton (à direita).

O momento linear das três partículas do estado final, provenientes do decaimento do quark top, incluindo o neutrino, é apresentado abaixo para cada componente.

Partícula	$p_x$ (GeV/c)	$p_y$ (GeV/c)	$p_z$ (GeV/c)
anti-muão ( $\mu^+$ )	-24.7	-24.9	-12.4
jato 1 ( $j_1$ )	-14.2	+50.1	+94.1
neutrino ( $\nu$ )	-104.1	+5.3	—

**B.1** Obtenha uma equação que relaciona o quadrado da massa do bóson  $W^+$ ,  $m_W^2$ , com as componentes do momento linear do neutrino e do anti-muão apresentados na tabela acima. Expresse a sua resposta em função do momento linear transversal do neutrino e do anti-muão,

$$\vec{p}_T^{(\nu)} = p_x^{(\nu)} \hat{i} + p_y^{(\nu)} \hat{j} \quad \text{e} \quad \vec{p}_T^{(\mu)} = p_x^{(\mu)} \hat{i} + p_y^{(\mu)} \hat{j},$$

e as componentes do seu momento linear segundo o eixo dos  $z$ ,  $p_z^{(\mu)}$  e  $p_z^{(\nu)}$ .

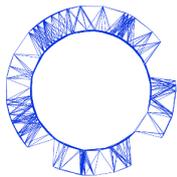
**B.2** Assumindo uma massa do bóson  $W^+$  de  $m_W = 80.4 \text{ GeV}/c^2$ , calcule as duas soluções possíveis para o momento linear do neutrino segundo o eixo dos  $z$ ,  $p_z^{(\nu)}$ . Dê a sua resposta em  $\text{GeV}/c$ .

**B.3** Calcule a massa do quark top correspondente a cada uma das duas soluções anteriores. Dê a resposta em  $\text{GeV}/c^2$ .

[Se não obteve as duas soluções em B.2, use

$$p_z^{(\nu)} = 70 \text{ GeV}/c \quad \text{e} \quad p_z^{(\nu)} = -180 \text{ GeV}/c.]$$

O número normalizado de acontecimentos (colisões) para a medida da massa do quark top (tal como



determinado experimentalmente), tem duas componentes: o chamado "sinal" (correspondente aos decaimentos dos quarks top) e o "fundo" (correspondente aos acontecimentos de outros processos que não incluem os quarks top). Os resultados experimentais incluem ambos os processos, ver Fig. 2.

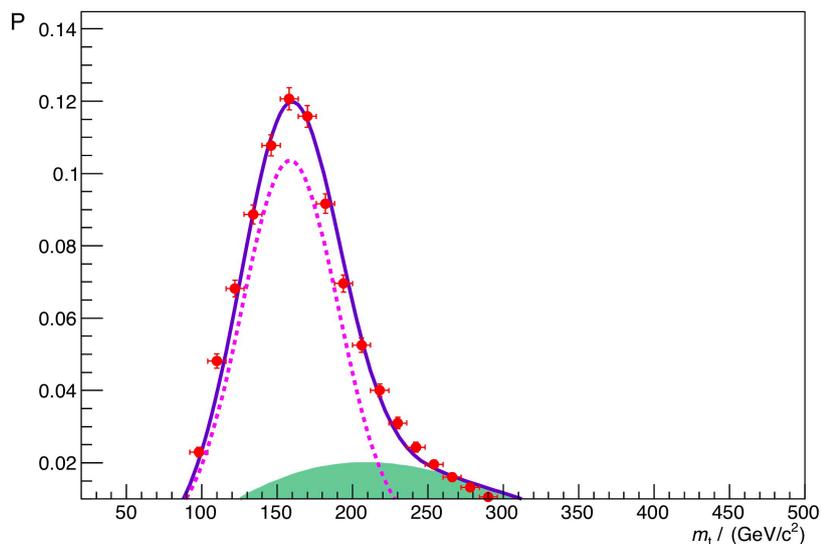
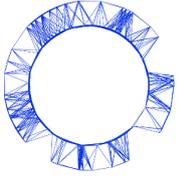


Figura 2. Distribuição de massa de quarks Top: os "Acontecimentos",  $E$ , (dentro de intervalos de  $12 \text{ GeV}/c^2$ ) são representados em função do valor medido da massa do quark top. Os pontos correspondem aos dados. A linha tracejada corresponde ao "sinal" e a sombra ao "fundo".

**B.4** De acordo com a distribuição de massa dos quarks top, qual das duas soluções anteriores é mais provável que esteja correta? Estimar a probabilidade da solução mais provável. 1.0pt

**B.5** Calcule a distância percorrida pelo quark top antes de decair, usando a solução mais provável. Suponha que o quark top tem uma vida média em repouso de  $5 \times 10^{-25} \text{ s}$ . 1.0pt

# Theory



IPHO 2018  
Lisbon, Portugal

# A2-1

Portugues (Portugal)

## Onde está o neutrino? (10 pontos)

### Parte A. Física do Detetor ATLAS (4,0 pontos)

**A.1** (0.5 pt)

$r =$

**A.2** (0.5 pt)

$p =$

**A.3** (1.0 pt)

$\xi =$                        $n =$                        $k =$

**A.4** (1.0 pt)

$\alpha =$

**A.5** (0.5 pt)

$\Delta E =$

**A.6** (0.5 pt)

$\omega(t) =$

### Part B. Descobrimdo o neutrino (6,0 pontos)

**B.1** (1.0 pt)

$m_W^2 =$

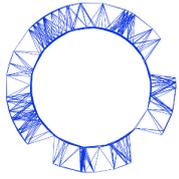
**B.2** (2.0 pt)

$p_z^\nu =$                       or                       $p_z^\nu =$

**B.3** (1.0 pt)

$m_t =$                       or                       $m_t =$

## Theory



IPhO 2018  
Lisbon, Portugal

# A2-2

Portugues (Portugal)

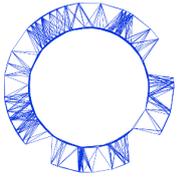
---

**B.4** (1.0 pt)

Candidato mais provável:

**B.5** (1.0 pt)

$d =$



## Física dos Sistemas Vivos (10 pontos)

Dados: pressão atmosférica normal,  $P_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ mmHg}$

### Parte A. A física do fluxo sanguíneo (4,5 pontos)

Nesta parte irá analisar dois modelos simplificados do fluxo sanguíneo em vasos.

Os vasos sanguíneos possuem uma forma aproximadamente cilíndrica e sabe-se que, para um fluxo constante e não turbulento de um fluido incompressível num cilindro rígido, a diferença de pressão do fluido nas duas extremidades do cilindro é dada por

$$\Delta P = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4} Q, \quad (1)$$

onde  $\ell$  e  $r$  são o comprimento e o raio do cilindro,  $\eta$  é a viscosidade do fluido e  $Q$  é a taxa de fluxo volumétrica, ou seja, o volume de fluido que passa pela secção transversal do cilindro por unidade de tempo. Esta expressão é frequentemente capaz de fornecer a ordem correta de grandeza para a diferença de pressão num vaso, mesmo sem levar em conta o fluxo pulsado, a compressibilidade e a forma irregular do vaso, e o facto de que o sangue não é um fluido simples, mas uma mistura de células e de plasma. Além disso, esta expressão tem a mesma forma que a lei de Ohm, com a taxa de fluxo volumétrico a ser interpretada como uma corrente, a diferença na pressão como uma diferença de potencial e o factor  $R = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4}$  como uma resistência.

Considere, por exemplo, a rede simétrica de arteríolas (pequenas artérias) representada na Figura 1, que fornece sangue a um tecido. Nesta rede, em cada bifurcação o vaso é dividido em dois vasos idênticos (entre si). No entanto, os vasos de níveis mais altos são mais finos e mais curtos: considere que os raios e os comprimentos dos vasos em dois níveis consecutivos,  $i$  e  $i + 1$ , estão relacionados por  $r_{i+1} = r_i/2^{1/3}$  e por  $\ell_{i+1} = \ell_i/2^{1/3}$ .

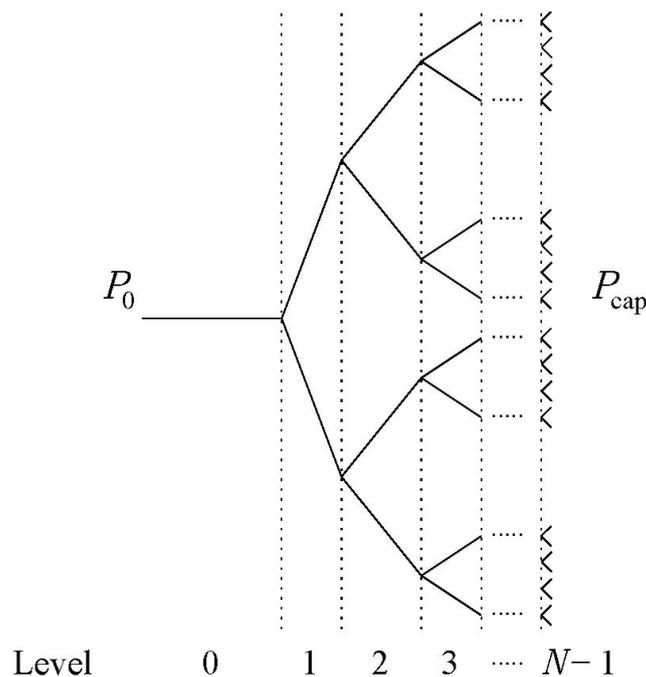
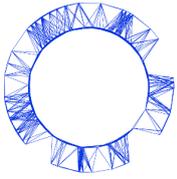


Figura 1. Rede de arteríolas.

# Theory



IPHO 2018  
Lisbon, Portugal

# Q3-2

Portugues (Portugal)

**A.1** Obtenha uma expressão para a taxa de fluxo volumétrico,  $Q_i$ , num vaso em qualquer nível  $i$ , em função do número total de níveis  $N$ , da viscosidade  $\eta$ , do raio  $r_0$  e do comprimento  $\ell_0$  do primeiro nível, e da diferença  $\Delta P = P_0 - P_{\text{cap}}$  entre a pressão na arteríola no nível 0,  $P_0$ , e a pressão no capilar,  $P_{\text{cap}}$ . 1.3pt

**A.2** Calcule o valor numérico do caudal volumétrico  $Q_0$  das arteríolas no nível 0, se o seu raio for  $6.0 \times 10^{-5}$  m e o seu comprimento for  $2.0 \times 10^{-3}$  m. Considere que a pressão na entrada das arteríolas é de 55 mmHg e que a rede do vaso possui  $N = 6$  níveis, ligando esta arteríola ao leito capilar na pressão de 30 mmHg. Considere que a viscosidade do sangue é  $\eta = 3.5 \times 10^{-3}$  kg m<sup>-1</sup> s<sup>-1</sup>. Exprima o resultado em ml/h. 0.5pt

A aproximação de paredes cilíndricas rígidas não está correta por várias razões. É particularmente importante incluir a dependência do fluxo com o tempo e ter em conta a variação no diâmetro do vaso que ocorre quando a pressão se altera durante um ciclo de bombagem do sangue realizada pelo coração (ciclo cardíaco). Além disso, observa-se que nos vasos maiores a pressão sanguínea varia significativamente durante um ciclo, enquanto nos vasos menores a amplitude das oscilações na pressão é muito menor, e o fluxo é quase independente do tempo.

Quando a pressão aumenta num único vaso (elástico), haverá um aumento no seu diâmetro, permitindo assim armazenar mais fluido no vaso e entregá-lo quando a pressão baixar. Por essa razão, o comportamento elástico do vaso pode ser simulado adicionando um condensador (C) à descrição inicial. Além disso, quando se tem em consideração a dependência no tempo do fluxo sanguíneo, deve-se considerar a inércia do fluido, proporcional à sua densidade  $\rho = 1.05 \times 10^3$  kg m<sup>-3</sup>. Essa inércia pode ser descrita por uma indutância (L) introduzida no modelo. Na Figura 2, representa-se o circuito equivalente para um único vaso neste modelo. A capacidade e a indutância equivalentes são dadas por

$$C = \frac{3\ell\pi r^3}{2Eh} \quad \text{and} \quad L = \frac{9\ell\rho}{4\pi r^2}, \quad (2)$$

respetivamente, onde  $h$  é a largura da parede do vaso e  $E$  é o módulo de Young da artéria, um coeficiente que descreve a alteração no tamanho do tecido do vaso quando é aplicada uma força. O módulo de Young tem unidades de pressão e é da ordem de  $E = 0.06$  MPa para arteríolas.

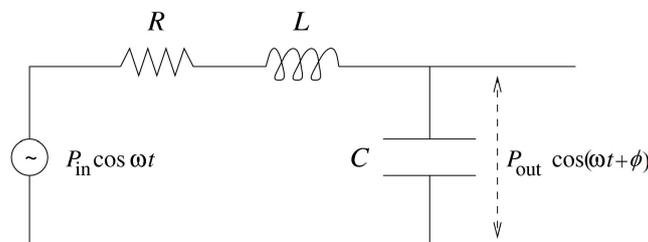
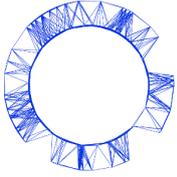


Figura 2. Circuito elétrico equivalente para um único vaso.



**A.3** Obtenha, no regime estacionário, a amplitude de pressão à saída do vasos,  $P_{out}$ , 2.0pt  
em função da amplitude de pressão à entrada,  $P_{in}$ , a resistência equivalente,  $R$ ,  
indutância,  $L$ , e capacidade,  $C$ , para o fluxo com frequência angular  $\omega$ . Deter-  
mine a condição entre  $\eta$ ,  $\rho$ ,  $E$ ,  $h$ ,  $r$  e  $\ell$  de forma que, para baixas frequências, a  
amplitude da oscilação de pressão à saída é inferior a  $P_{in}$ .

**A.4** Para a rede de vasos em **A.2**, estime a espessura máxima da parede da arteríola 0.7pt  
 $h$  de modo que a condição estabelecida em **A.3** seja satisfeita (considere que  $h$   
é independente do nível).

### Parte B. Crescimento de um tumor (5,5 pontos)

O crescimento do tumor é um processo muito complexo em que mecanismos biológicos, como a proliferação celular e a seleção natural, estão ligados à física. Neste problema, vai ser considerado um modelo simplificado de crescimento tumoral que aborda o aumento da pressão comumente observado em tumores sólidos.

Considere um grupo de células normais formando um tecido circundado por uma membrana basal inextensível, que força o tecido a manter sempre a mesma forma: uma esfera de  $R$  raio (Figura 3).

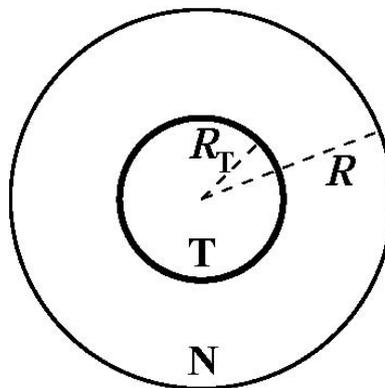


Figura 3. Tumor simplificado.

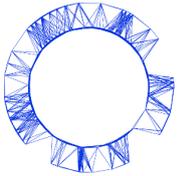
Inicialmente o tecido não tem tensões residuais, isto é, a pressão em todos os pontos é igual à pressão atmosférica.

No instante  $t = 0$ , um tumor começa a crescer no centro desta esfera e, à medida que cresce, a pressão dentro do tecido aumenta. Considere que ambos os tecidos (normal, N e tumor, T) são compressíveis de tal forma que suas densidades,  $\rho_N$  e  $\rho_T$ , aumentam linearmente com a pressão:

$$\rho_N = \rho_0 \left( 1 + \frac{p}{K_N} \right), \quad \rho_T = \rho_0 \left( 1 + \frac{p}{K_T} \right), \quad (3)$$

onde  $\rho_0$  é a densidade do tecido sem pressão,  $p$  é a diferença de pressão relativamente à pressão atmosférica e  $K_N$ ,  $K_T$ , são os módulos de compressibilidade dos tecidos normal e tumoral, respetivamente. Em geral, os tumores são mais rígidos e, portanto, têm um módulo de compressibilidade superior.

## Theory



IPhO 2018  
Lisbon, Portugal

# Q3-4

Portugues (Portugal)

- B.1** A massa de células normais não é alterada enquanto o tumor está a crescer. 1.0pt  
Obter a razão entre o volume do tumor e o volume total do tecido,  $v = V_T/V$ , em função da razão entre a massa tumoral ( $M_T$ ) e a massa de tecido normal ( $M_N$ ),  $\mu = M_T/M_N$ , e a razão entre os módulos de compressibilidade,  $\kappa = K_N/K_T$ .

A hipertermia é por vezes utilizada, em conjunto com quimioterapia e radioterapia, no tratamento do cancro. Na hipertermia, as células cancerígenas são seletivamente aquecidas desde a temperatura normal do corpo humano, 37 °C, até temperaturas acima de 43 °C, induzindo a sua morte. Os investigadores estão atualmente a desenvolver nanotubos de carbono cobertos com proteínas especiais capazes de se ligar às células tumorais. Quando o tecido é irradiado com radiação infravermelha próxima, os nanotubos absorvem-no a uma taxa muito maior do que os tecidos circundantes e, portanto, podem ser seletivamente aquecidos, bem como as células tumorais às quais estão ligados.

Considere que o tumor, as células normais e o tecido circundante têm uma condutividade térmica constante  $k$ , isto é, na geometria deste problema, a energia que cruza uma superfície esférica de raio  $r$  por unidade de tempo e por unidade de área é igual a  $k$  vezes a derivada da temperatura em ordem a  $r$ . Os nanotubos são uniformemente distribuídos no volume do tumor e são capazes de fornecer uma potência  $\mathcal{P}$  de energia térmica por unidade de volume. Assuma que longe do tumor a temperatura é igual à temperatura corporal humana normal.

- B.2** Determinar, para o estado estacionário, a temperatura no centro do tumor em função de  $\mathcal{P}$ ,  $k$ , a temperatura corporal humana e o raio do tumor,  $R_T$ . 1.7pt

- B.3** Obter a energia mínima por unidade de volume,  $\mathcal{P}_{\min}$ , necessária para aquecer todas as células tumorais num tumor com 5,0 cm de raio a uma temperatura maior do que 43,0 °C. Considere a condutividade térmica do tecido como igual a  $k = 0.60 \text{ W K}^{-1}\text{m}^{-1}$ . 0.5pt

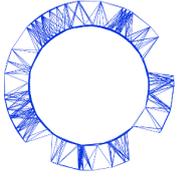
Considere que o tumor é irrigado por uma rede de vasos com uma estrutura ramificada como na questão **A.1**. À medida que o tumor cresce, quando a sua pressão  $p$  se torna maior do que a pressão  $P_{\text{cap}}$  nos vasos mais finos, os raios desses vasos diminuirão de uma pequena quantidade  $\delta r$ . Se essa pressão atingir um valor crítico  $p_c$  (o que corresponderia a uma diminuição do raio de  $\delta r_c$ ), os vasos mais finos entrariam em colapso, comprometendo seriamente a irrigação do tumor. A pressão e a variação do raio podem ser relacionadas pela seguinte relação fenomenológica:

$$\frac{p}{P_{\text{cap}}} - 1 = \left( \frac{p_c}{P_{\text{cap}}} - 1 \right) \left( 2 - \frac{\delta r}{\delta r_c} \right) \frac{\delta r}{\delta r_c}. \quad (4)$$

Considere que apenas os vasos menores (do nível  $N-1$ ) têm o seu raio alterado quando o tumor aumenta a sua pressão.

- B.4** No regime linear (isto é, considere que  $p - P_{\text{cap}}$  é muito pequeno), exprima a queda relativa na taxa de fluxo,  $\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}}$ , nesses vasos mais finos, em função da razão dos volumes  $v = V_T/V$ , e  $K_N$ ,  $N$ ,  $p_c$ ,  $\delta r_c$ ,  $r_{N-1}$ ,  $P_{\text{cap}}$ . 2.3pt

# Theory



IPhO 2018  
Lisbon, Portugal

# A3-1

Portugues (Portugal)

## Física dos Sistemas Vivos (10 pontos)

### Parte A. A física do fluxo sanguíneo (4.5 pontos)

**A.1** (1.3 pt)

$$Q_i =$$

**A.2** (0.5 pt)

$$Q_0 =$$

**A.3** (2.0 pt)

$$P_{\text{out}} =$$

Condição:

**A.4** (0.7 pt)

$$\text{Máximo } h =$$

### Parte B. Crescimento de um tumor (5.5 pontos)

**B.1** (1.0 pt)

$$v =$$

**B.2** (1.7 pt)

Temperatura:

**B.3** (0.5 pt)

$$\mathcal{P}_{\text{min}} =$$

**B.4** (2.3 pt)

$$\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} \simeq$$