

Instruções Gerais: Prova Teórica (30 pontos)

A prova teórica terá a duração de 5 horas e vale um total de 30 pontos.

Antes da prova

Não deve abrir os envelopes que contém os problemas antes do sinal sonoro que indica o início da prova.

Tanto o começo como o final da prova serão indicados por sinais sonoros. O tempo de prova será também anunciado no final de cada hora de prova, assim como 15 minutos antes do final (antes do último sinal sonoro).

During the exam

- Serão fornecidas folhas de resposta para escrever as suas respostas. Introduza as suas respostas finais nas caixas de texto apropriadas que estão nas **folhas de resposta**. Para cada problema serão também fornecidas **folhas brancas** extras destinadas aos seus **cálculos detalhados**. Utilize sempre as folhas brancas que corresponderem ao problema em que está a trabalhar (verifique o número do problema no cabeçalho da folha branca). Se tiver escrito algo que não queira que seja cotado, faça uma cruz por cima. Use apenas o lado da frente de cada folha.
- Seja o mais conciso possível nas respostas: sempre que possível use equações, operadores lógicos e diagramas para explicar o seu raciocínio. Evite frases longas.
- Deverá apresentar os resultados numéricos com um número apropriado de algarismos significativos quando um resultado numérico lhe for pedido.
- Frequentemente será possível resolver alíneas do problema mais à frente sem ter resolvido todas as alíneas anteriores.
- Uma lista de constantes físicas será entregue numa página à parte.

Não é permitido sair do local de trabalho sem permissão. Se necessitar de assistência (encher a garrafa de água, avaria da calculadora, ir à casa de banho, etc.) chame a atenção de um guia levantando uma das três bandeiras que tem à disposição no cubículo ("Refill my water bottle, please", ou "I need to go to the toilet, please", ou "I need help, please" nos outros casos).

No final da prova

- Quando tocar o sinal sonoro indicador do final da prova pare imediatamente de escrever.
- Para cada problema junte as folhas na seguinte ordem: enunciado, folhas de resposta, folhas brancas e folhas de rascunho.
- Coloque todas as folhas que correspondem a um mesmo problema no mesmo envelope. Coloque as instruções gerais no envelope que sobrar. Assegure-se que o seu código de aluno está escrito em cada envelope. Entregue também todas as folhas em que não escreveu. Não é permitido levar nenhuma folha de papel para fora da sala de prova.
- Deixe na mesa a calculadora providenciada pela organização.

Matéria Escura

A primeira inferência formal da existência de matéria escura deve-se a Fritz Zwicky, e foi baseada na sua observação da dinâmica do aglomerado de galáxias Coma, um aglomerado que consiste em cerca de 1000 galáxias. Zwicky usou o Teorema do Virial para estimar a massa do aglomerado de galáxias. Num sistema simples Sol-planeta, onde o planeta tem um movimento de revolução numa órbita circular em torno do Sol, o teorema do virial manifesta-se no fato de a energia cinética do planeta estar relacionada de forma exata com a sua energia potencial gravítica. No caso geral de um sistema de muitas partículas ligadas por uma certa interação, o teorema do virial relaciona a média temporal da energia cinética total com a média temporal da energia potencial gravítica.

Em 1933, baseado na sua observação da velocidade das galáxias próximas da fronteira do aglomerado de galáxias, Zwicky estimou que o cluster tem mais massa do que a que se observa visualmente. A atração gravitacional entre a matéria observável (as galáxias) era demasiado pequena para explicar as velocidades observadas das galáxias. Assim, deverá existir alguma massa escondida que explique essa velocidade tão elevada. Essa massa invisível é a massa da matéria escura. No que se segue, assuma que a massa de cada galáxia é a soma da sua massa visível e da massa da matéria escura que se move juntamente com essa galáxia, e que a matéria escura interage com a matéria visível apenas gravitacionalmente.

A. Aglomerado de Galáxias

Considere um aglomerado de galáxias constituído por um número N elevado de galáxias e matéria escura que estão distribuídas homogeneamente numa esfera de raio R , sendo M a massa total do aglomerado (galáxias e matéria escura). Assuma que a massa média total (visível e escura) de uma galáxia é m .

A.1	Assumindo uma distribuição contínua de matéria no aglomerado, determine a energia potencial gravitacional total do aglomerado, em função de M e de R .	1,0 pt.
-----	--	---------

Em virtude da expansão cosmológica, qualquer objeto distante está a afastar-se de um observador na Terra com uma velocidade que depende da distância entre o observador e o objeto. Uma certa frequência de Lyman (uma linha do espectro de emissão do hidrogénio) de uma supernova do tipo IA da i -ésima galáxia do aglomerado de galáxias é observada como sendo f_i , com $i=1,\dots,N$. A frequência de Lyman correspondente na Terra é f_0 .

A.2	Determine a velocidade média V_{cr} do aglomerado de galáxias que está a afastar-se da Terra em função de f_i (com $i = 1, \dots, N$), f_0 e N . Note que a velocidade de uma galáxia é muito pequena quando comparada com a velocidade da luz, c .	0,5 pt.
-----	--	---------

A.3	Assumindo que as velocidades das galáxias em relação ao centro do aglomerado são isotrópicas (as mesmas em qualquer direção), determine v_{rms} , a raiz quadrada da média dos quadrados da velocidade das galáxias em relação ao centro do aglomerado, em função de N, f_i (com $i = 1, \dots, N$) e de f_0 . A partir deste resultado, determine a energia cinética média de uma galáxia em relação ao centro do aglomerado em função de v_{rms} e de m .	1,5 pt.
-----	--	---------

Para determinar a massa total do aglomerado podemos usar o Teorema do Virial. Este teorema diz que para um sistema de partículas ligadas por forças conservativas,

$$\langle K \rangle_t = -\gamma \langle U \rangle_t,$$

onde $\langle K \rangle_t$ é a média no tempo da energia cinética total, $\langle U \rangle_t$ é a média no tempo da energia potencial total e γ é uma constante. Este teorema pode ser obtido assumindo que para um sistema de partículas ligadas pelas interações entre si, as magnitudes da posição e da quantidade de movimento de cada partícula são finitas, pelo que a quantidade seguinte

$$\Gamma = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$$

é finita.

A.4	Usando o facto de a média temporal ao longo de um período temporal extenso se anular, $\langle \frac{d\Gamma}{dt} \rangle_t = 0$, determine γ do Teorema do Virial para o caso da atração gravitacional. (Pista: Tente resolver o problema realizando a soma em Γ para um pequeno número de galáxias).	1,7 pt.
A.5	A partir dos resultados anteriores determine a massa total de matéria escura do aglomerado em função de N, m_g, R e v_{rms} , onde m_g é a massa visível total média de uma galáxia. Note que a velocidade quadrática média da matéria escura é a mesma da das galáxias.	0,5 pt.

B. Matéria escura na Galáxia

A matéria escura também existe no interior e em volta de uma galáxia. Considere uma galáxia esférica com um raio visível R_g (aproximadamente a distância mais afastada onde um número elevado de estrelas ainda é visível, mas note que um pequeno número de estrelas podem ainda estar distribuídas na região para além de R_g). Assuma que as estrelas da galáxia são partículas pontuais com uma massa média m_s . Estas estrelas estão distribuídas homogeneamente com uma densidade numérica n , e assume-se que se estão a movimentar em órbitas circulares.

B.1	Se a galáxia consistir apenas de estrelas, determine a velocidade $v(r)$ de uma estrela em função da sua distância ao centro da galáxia e esboce o gráfico de $v(r)$ para $r < R_g$ e $r \geq R_g$.	0,8 pt.
-----	--	---------

A existência de matéria escura pode ser inferida da curva de rotação da galáxia, que é um gráfico de $v(r)$ obtido a partir de dados observacionais. A figura em baixo mostra um padrão comum para a curva de rotação de uma galáxia. Por simplicidade, assuma que $v(r)$ é uma função linear para $r \leq R_g$ e uma constante para $r \geq R_g$.

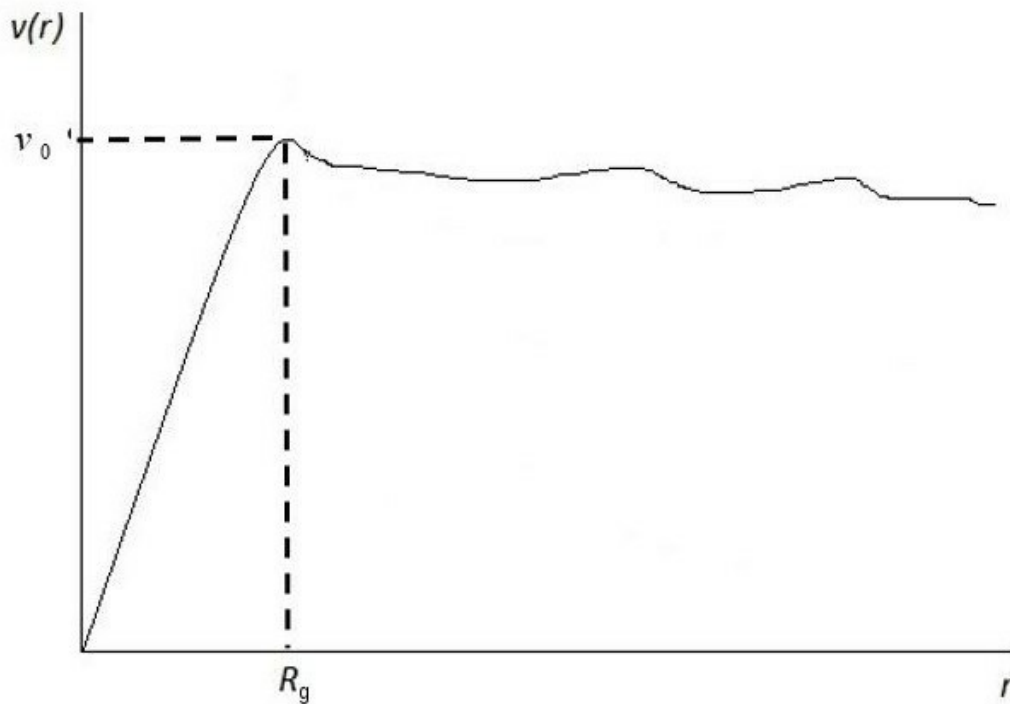


Fig. 1 Gráfico da curva de rotação de uma galáxia.

B.2	Determine a massa total m_R da parte da galáxia dentro de uma esfera de raio R_g , expressa em função de v_0 e de R_g .	0,5 pt.
-----	---	---------

A discrepância entre Fig. 1 e o gráfico obtido em B.1 indica a existência de matéria escura.

B.3	Determine a densidade de massa de matéria escura em função de r , R_g , v_0 , n , e m_s para $r < R_g$ e para $r \geq R_g$.	1,5 pt.
-----	--	---------

C. Gás interestelar e matéria escura

Consideremos agora uma galáxia jovem cuja massa é dominada pelo gás interestelar e matéria escura (despreze as massas das estrelas). Assume-se que o gás interestelar é constituído por partículas idênticas de massa m_p (massa do protão). A densidade numérica $n(r)$ e a temperatura $T(r)$ do gás dependem da distância r ao centro da galáxia. Apesar de ocorrerem muitos processos físicos no gás, podemos assumir que o gás está em equilíbrio hidrostático entre a sua pressão e a atração gravitacional na galáxia.

C.1	Determine o gradiente de pressão do gás dP/dr em função de $m'(r)$, r e $n(r)$. Aqui $m'(r)$ é a massa total do gás e da matéria escura no interior de uma esfera de raio r centrada na galáxia.	0,5 pt.
C.2	Assumindo que o gás interestelar é um gás ideal, determine $m'(r)$ em função de $n(r)$, $T(r)$ e das suas derivadas em relação a r .	0,5 pt.

A seguir, por simplicidade, vamos assumir que o gás é uma distribuição isotérmica à temperatura T_0 e que a densidade numérica do gás é dada por

$$n(r) = \frac{\alpha}{r(\beta + r)^2},$$

onde α e β são constantes.

C.3	Determine a densidade de massa de matéria escura no interior da galáxia em função de r .	1,0 pt.
-----	--	---------

Código do Estudante						
---------------------	--	--	--	--	--	--

A. Aglomerado de Galáxias

Questão	Resposta	Classificação
A.1 (1,0 pt.)	$U =$	
A.2 (0,5 pt.)	$V_{rc} =$	
A.3 (1,5 pt.)	$K_{ave} =$	
A.4 (1,7 pt.)	$\gamma =$	
A.5 (0,5 pt.)	$M_{dm} =$	

B. Matéria Escura na Galáxia

Questão	Resposta	Classificação
<div>B.1</div> <div>(0,8 pt)</div>	<div>Para $r < R_g$:</div> <div>$v(r) =$</div> <div>Para $r \geq R_g$:</div> <div>$v(r) =$</div> <div>Esboço de $v(r)$ para $r < R_g$ e $r \geq R_g$:</div>	

--	--	--	--

B.2 (0,5 pt.)	$m_R = m'(R_g) =$	
B.3 (1,5 pt.)	Para $r < R_g$: $\rho(r) =$ Para $r \geq R_g$: $\rho(r) =$	

C. Gás Interestelar e Matéria Escura

Questão	Resposta	Classificação
C.1 (0,5 pt.)	$\frac{dP}{dr} =$	
C.2 (0,5 pt.)	$m'(r) =$	
C.3 (1,0 pt.)	$\rho_{dm}(r) =$	

----- NÃO ESCREVER EM BAIXO -----

SECÇÃO	VALOR
A	
B	
C	
TOTAL	

Terramoto, Vulcão e Tsunami

A Indonésia tem desastres naturais para dar e vender. Quase todos os tipos de desastres naturais ocorreram na Indonésia, desde erupções vulcânicas, até terremotos e tsunamis.

A. A Erupção do Vulcão Merapi



Fig. 1: Nuvem piroclástica durante a erupção do Merapi, Cortesia do Gabinete de Vulcanologia de Yogyakarta, BPPTKG.

O vulcão Merapi em Yogyakarta é um dos vulcões mais ativos da ilha de Java. Escoamentos piroclástico são uma característica bem conhecida das erupções deste vulcão. Estes escoamentos caracterizam-se por uma mistura quente de gás e de rocha espelida pelo vulcão. A 26 de outubro de 2010, o Merapi mostrou o seu caráter explosivo, produzindo uma pluma de cinza que chegou aos 12 km de altitude (Fig. 1), juntamente com correntes piroclásticas que desalojaram 20000 pessoas.

Investiguemos as causas da maior erupção explosiva do Merapi em 2010. É conhecido pelos geofísicos que a influência da água no magma desempenha um papel importante no comportamento explosivo das erupções vulcânicas (são erupções hidro-magmáticas). Consideremos o vulcão como um sistema que consiste numa mistura de partículas magmáticas e de água. As fronteiras deste sistema são as condutas do vulcão e a atmosfera. A erupção explosiva desenrola-se em duas etapas: (1) uma mistura instantânea entre o magma e a água e (2) a expansão da mistura. No primeiro passo a massa de magma (m_m) que se encontra à temperatura absoluta T_m , mistura-se com uma massa de água externa (m_w) que se encontra à temperatura absoluta T_w . O equilíbrio térmico é atingido quase instantaneamente. Esta interação pode ser considerada como um processo que ocorre a volume constante. Não considere o calor latente de evaporação da água nem o calor latente de fusão do magma.

A.1	Encontre a temperatura de equilíbrio nesta primeira etapa em função das massas e dos calores específicos mássicos da água c_{Vw} e do magma c_{Vm} .	0,5 pt.
A.2	Determine a pressão de equilíbrio na primeira etapa, assumindo que a mistura pode ser modelada como um gás ideal. Assuma que o volume por mole de mistura é v_e .	0,3 pt.

A expansão do sistema (segunda etapa) pode ocorrer de diferentes maneiras, uma das quais é detonação térmica. Apesar deste processo ser bastante complicado, podemos medir de forma empírica a velocidade da mistura em erupção. A velocidade do gás durante a erupção depende da pressão p , da massa m e do volume V da mistura ao longo da conduta do vulcão.

A.3	Obtenha a velocidade do gás durante a erupção em função de p , m e V a menos de uma constante multiplicativa k .	0,5 pt.
-----	--	---------

A pressão observada é da ordem de 100 MPa. Isto significa que a velocidade de erupção pode ser balística.

B. O Terramoto de Yogyakarta

O terramoto de 2006 de Yogyakarta teve magnitude $M_w = 6.4$ e destruiu muitos edifícios na região de Bantul e de Yogyakarta. Este terramoto ocorreu às 05h54:00m locais (ou às 22h54:00m UTC). O tremor de terra causou um rápido deslocamento de um segmento da falha de Opak (ver Fig. 2). O hipocentro deste terramoto foi a 15 km abaixo da superfície.

A onda sísmica que se propaga na crosta terrestre pode ser detetada usando um sismógrafo. Ao diagrama obtido pelo sismógrafo dá-se o nome de sismograma (gráfico na parte inferior das Fig. 2 e 3). Os sismogramas representados mostram a velocidade vertical do solo em função do tempo nas estações de Gamping, em Yogyakarta (YOGI) (Fig. 2) e de Denpasar, em Bali (DNP) (Fig. 3). Em geral, as ondas sísmicas podem ser de 3 tipos diferentes: ondas longitudinais, ou primárias (ondas P), transversais ou secundárias (ondas S) e ondas de superfície. As ondas P e S atravessam a crosta, enquanto que as ondas superficiais viajam à superfície da Terra. As ondas sísmicas que viajam abaixo da superfície da Terra podem propagar-se em linha reta, podem ser refletidas por fronteiras entre diferentes regiões dentro da Terra, ou podem refratar-se nessas mesmas fronteiras. A onda longitudinal (onda P) tem a velocidade mais elevada, enquanto que a onda de superfície possui a velocidade mais baixa (aproximadamente 60% da velocidade da onda P).

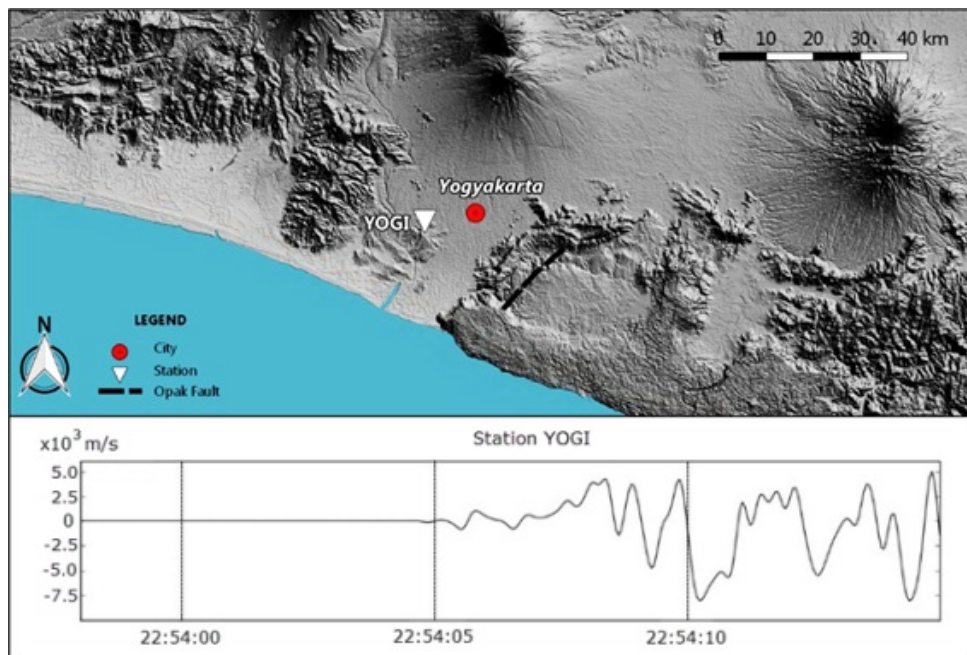


Fig. 2: Localização de YOGI no mapa.

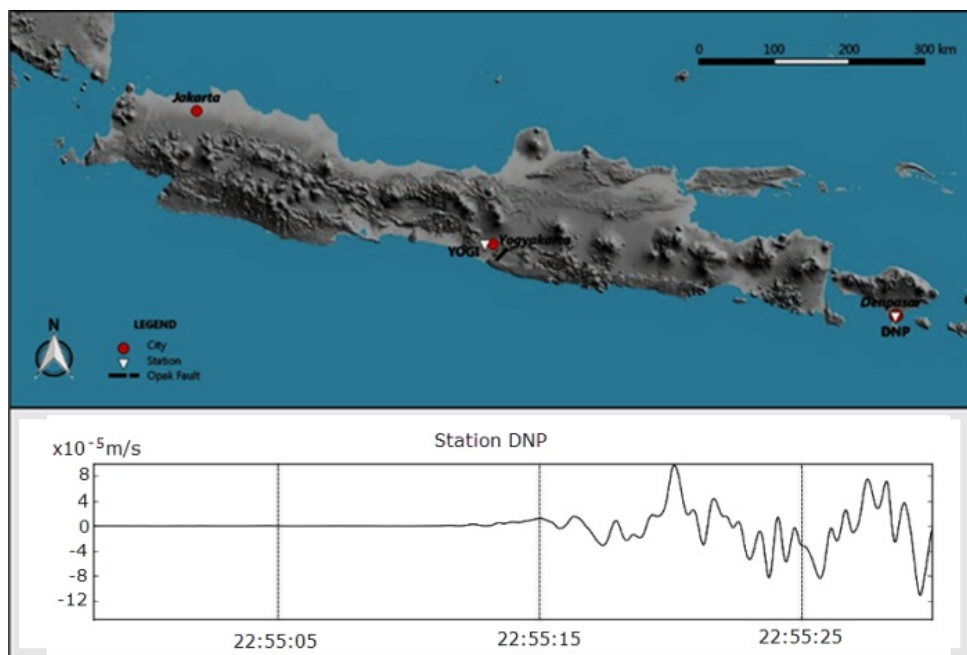


Fig. 3: Localização de DNP (Denpasar) no mapa.

As distâncias entre o epicentro (projeção do hipocentro na superfície terrestre) e as estações YOGI e DNP são 22,5 km e 500 km respetivamente. A espessura da crosta terrestre em Java é 30 km. Abaixo da crosta terrestre encontra-se o manto. Como qualquer outro fenómeno ondulatório, as ondas sísmicas seguem a lei de Snell. As ondas sísmicas podem ser refletidas pela interface entre a crosta e o manto. Neste problema não considere a curvatura terrestre.

B.1	A Fig. 2 mostra o sismograma na estação YOGI. Utilize os dados deste gráfico para obter a velocidade da onda P na crosta terrestre.	0,5 pt.
B.2	Obtenha os tempos de viagem até à estação DNP em Denpasar de uma onda P direta e de uma onda P refletida no terramoto de Yogyakarta.	0,6 pt.

Assuma que a Terra é composta por duas camadas, a crosta e o manto, e que a onda primária propaga-se em cada uma destas camadas com velocidades constantes diferentes. A velocidade da onda sísmica no manto é maior do que na crosta. Note que uma onda P que é refratada para o manto de tal forma que o ângulo refratado é de 90° , pode propagar-se ao longo da interface entre o manto e a crosta à medida que se vai refratando de volta à crosta.

B.3	Obtenha a velocidade da onda P no manto.	1,2 pt.
-----	--	---------

Numa descrição mais realista da estrutura terrestre, a crosta pode ser dividida num número de camadas finas de tal modo que a velocidade da onda sísmica é uma função da profundidade z : $v(z) = v_0 + az$, onde a é uma constante. Considere que o hipocentro se encontra aproximadamente à superfície da crosta. Neste modelo, um raio da onda sísmica descreve trajetórias curvas.

B.4	Definimos o parâmetro de raio: $p = \sin \theta(z)/v(z)$, onde $\theta(z)$ é o ângulo entre o raio e a normal. Suponha que a onda sísmica chega à estação com parâmetro de raio p . Obtenha a distância entre a estação e o hipocentro em função de p , v_0 , e a . Assuma que o hipocentro está muito perto da superfície.	1,4 pt.
B.5	Obtenha o tempo de propagação T entre o hipocentro e qualquer estação na forma de um integral em z .	1,0 pt.

A Terra pode ser considerada como uma sobreposição de camadas homogêneas com espessuras diferentes δz_i e onde a velocidade da onda sísmica é v_i .

B.6	A partir do resultado do problema anterior, obtenha o tempo de propagação aproximado (T) da onda que viaja entre o hipocentro e a estação DNP, considerando que a crosta é constituída por 3 camadas ($i=1,2,3$), caracterizadas por $v_1 = 6,65$ km/s; $v_2 = 6,97$ km/s; $v_3 = 6,99$ km/s; $p = 0,143$; $\delta z_1 = 6,0$ km; $\delta z_2 = 9,0$ km; $\delta z_3 = 15$ km.	1,0 pt.
-----	---	---------

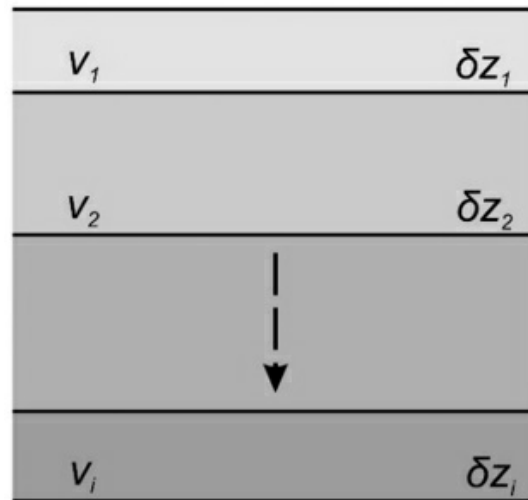


Fig. 4: Modelo simplificado das camadas da Terra.

C. Tsunami de Java

O terramoto e tsunami de Pangandaran ocorreu junto à costa oeste e central de Java em 17 de julho de 2006, às 15:19:27 (hora local). Durante um terramoto em que o epicentro esteja localizado por baixo de uma falha da crosta no fundo oceânico, a falha pode deslocar-se produzindo uma enorme onda chamada tsunami. Por outras palavras, um tsunami é uma onda na água de baixa profundidade, que é iniciada com uma pequena amplitude mas com um comprimento de onda extremamente grande. Considere uma rápida subida do fundo oceânico junto a uma falha, como mostra a Fig. 5. Assuma que a energia do terramoto é transformada em energia potencial para o levantamento da água do mar. Para este modelo simples fazemos a aproximação de que a água levantada tem a geometria de uma caixa com uma área $\lambda L/2$ (onde $L \gg \lambda$) e altura h .

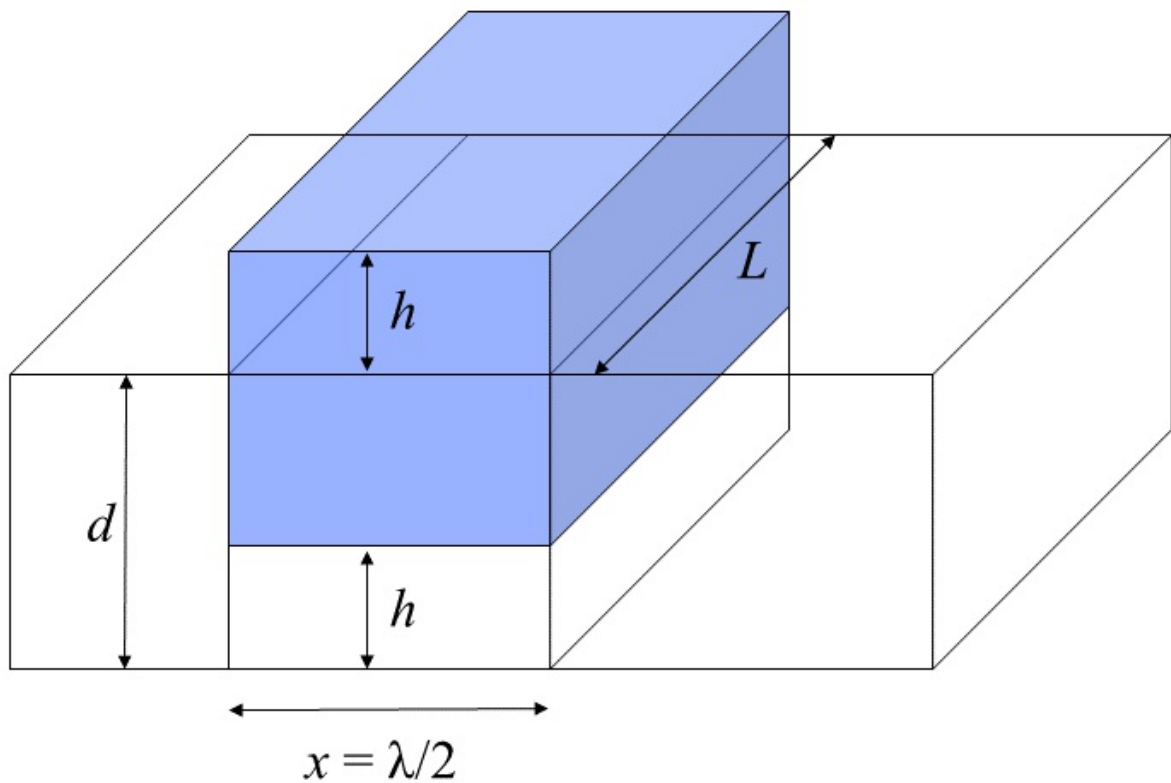


Fig. 5: Ilustração da onda do tsunami, onde d é a profundidade do oceano.

C.1	Calcule a energia potencial armazenada na água do mar que sobe devido ao tremor de terra em relação à superfície do oceano. Assuma que a densidade da água do mar é ρ .	0,5 pt.
C.2	Calcule a velocidade do tsunami a menos de um fator adimensional.	1,2 pt.
C.3	Usando argumentos energéticos, determine a amplitude da onda do tsunami em função da profundidade, assumindo que a profundidade varia lentamente e sabendo também que a uma profundidade d_0 a amplitude é A_0 .	1,3 pt.

Código de Estudante						
---------------------	--	--	--	--	--	--

Terramoto, Vulcão e Tsunami**A. Erupção do Vulcão Merapi**

Questão	Resposta	Classificação
A.1 (0,5 pt.)	$T_e =$	
A.2 (0,3 pt.)	$p_e =$	
A.3 (0,5 pt.)	$v_g =$	

B. O Terramoto de Yogyakarta

Questão	Resposta	Classificação
B.1 (0,5 pt.)	$v_p =$	
B.2 (0,6 pt.)	$t_{direto} =$ $t_{refletido} =$	
B.3 (1,2 pt.)	$v_m =$	
B.4 (1,4 pt.)	$X =$	
B.5 (1,0 pt.)	$T =$	
B.6 (1,0 pt.)	$T(p) =$	

C. Tsunami de Java

Questão	Resposta	Classificação
C.1 (0,5 pt.)	$E_p =$	
C.2 (1,2 pt.)	$v =$	
C.3 (1,3 pt.)	$A =$	

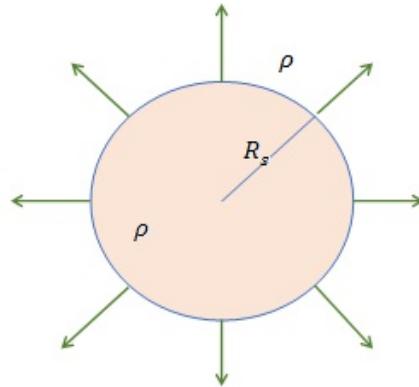
----- NÃO ESCREVER EM BAIXO -----

SECÇÃO	VALORES
Secção A	
Secção B	
Secção C	
TOTAL	

Inflação Cósmica

Em virtude do movimento relativo das galáxias observadas a partir da Terra, os comprimentos de onda do espectro visível de uma galáxia particular são diferentes dos comprimentos de onda originais. Este efeito designa-se por efeito Doppler eletromagnético. Esperar-se-ia obter, para um conjunto de galáxias, uma distribuição aleatória de variações de comprimento de onda: alguns positivos (desvio para o vermelho) e outros negativos (desvio para o azul). No entanto, as observações mostram que, em todos os casos, exceto para um pequeno grupo de galáxias próximas, os espectros sofrem um desvio para o vermelho. Isto deve ser verdade mesmo que a observação se realize num ponto diferente do Universo. Em conclusão, o nosso Universo deve estar em expansão. Por outro lado as irregularidades locais do Universo podem ser desprezadas para escalas de distâncias superiores a 100 Mpc, em que 1 pc = 3,26 anos-luz. Fazendo a média para grandes distâncias, a distribuição de galáxias torna-se cada vez mais isotrópica (independente da direção) e homogénea (independente da posição). Então podemos assumir o Universo como matéria com uma densidade de massa ρ constante e que está em expansão.

A. Expansão do Universo



Como modelo simples do Universo, consideremos uma esfera em expansão, com densidade constante em cada instante, inserida numa esfera muito maior com a mesma densidade. Consideremos que, num certo instante, o raio da esfera menor é R_s . Para representar a expansão da esfera, a dependência no tempo do seu raio $R(t)$ é dada por um fator de escala $a(t)$, isto é, $R(t) = a(t)R_s$.

Recorrendo à lei da gravidade de Newton para estimar a velocidade de um elemento de massa na fronteira da esfera de acordo com o nosso modelo do Universo, podemos obter um conjunto de equações de Friedmann. A primeira destas equações é

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = A_1 \rho(t) - \frac{kc^2}{R_s^2 a^2(t)} \quad (1)$$

onde k é uma constante adimensional.

A.1	Determine a constante A_1 na equação (1).	1,3 pt.
-----	---	---------

Até agora a discussão foi não-relativista. Mas na verdade pode ser estendida para um sistema relativista reinterpretando $\rho(t)c^2$ como a densidade de energia total (excluindo a energia potencial gravitacional). Neste sistema relativista, obtém-se a segunda equação de Friedmann:

$$\dot{\rho} + A_2 \left(\rho + \left(\frac{p}{c^2} \right) \right) \frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (2)$$

recorrendo à primeira lei da termodinâmica num sistema adiabático, onde c e p designam a velocidade da luz e a pressão na esfera, respetivamente.

A.2	Determine a constante A_2 na equação (2).	0,9 pt.
-----	---	---------

Para resolver as equações (1) e (2), deve ser assumida a relação $p = p(\rho)$, de forma que $p(t)/c^2 = w\rho(t)$, onde w é uma constante. Há também um fator $H = \dot{a}/a$, chamado parâmetro de Hubble. O valor atual, no instante presente, dos parâmetros são simbolizados pelo subscrito 0, como t_0 , ρ_0 , H_0 , a_0 e por aí adiante. Por simplicidade, consideramos $a_0 = 1$.

É aceite que o Universo teve o seu início numa grande explosão chamada Big-Bang que produziu radiação de partículas relativistas. Durante a sua expansão, o Universo vai arrefecendo e as partículas tornam-se não-relativistas. As observações recentes mostram que o Universo é dominado pela densidade de energia da constante cosmológica. Para o caso do fóton, o seu comprimento de onda aumenta proporcionalmente ao fator de escala $a(t)$ à medida que o Universo expande.

A.3	Para cada um dos três casos seguintes, determine o valor resultante de w para (i) um Universo preenchido apenas com radiação (i.e energia dos fotões), (ii) um Universo preenchido apenas com matéria não-relativista e (iii) um Universo com densidade de energia constante.	1,2 pt.
A.4	No caso de $k = 0$, determine $a(t)$ para cada um dos casos (i) a (iii) considerados em A.3. Use a condição inicial $a(t = 0) = 0$ para os casos (i) e (ii), e use a condição $a_0 = 1$ para o caso (iii).	1,2 pt.

A constante k na Eq. (1) refere-se à classificação da geometria espacial do Universo. O seu valor pode ser $k = +1$ para um Universo com curvatura positiva (fechado), $k = 0$ para um Universo plano (infinito), e $k = -1$ para um Universo com curvatura negativa (aberto, infinito). Definimos a razão de densidades $\Omega = \rho/\rho_c$, onde $\rho_c c^2 = H^2/A_1$ é a *densidade crítica de energia*. Note que A_1 é obtida do problema A.1.

A.5	Expresse k na Eq.(1) em função de Ω , H , a , e R_0 .	0,1 pt.
A.6	Determine o intervalo para Ω que corresponde a cada valor de $k = +1$, $k = 0$ e $k = -1$.	0,3 pt.

B. Motivação para introduzir a fase inflacionária e as suas condições gerais

A observação de um ruído de fundo de radiação de micro-ondas cósmicas (CMB) sugere que no presente o nosso universo é aproximadamente plano. O problema é que se isto é verdade então o universo atual deverá ter começado como um universo exatamente plano, de outra forma qualquer desvio da planura iria acabar por crescer com o tempo, destruindo a planaridade atual.

B.1	Determine $(\Omega(t) - 1)$ em função do tempo para o universo quando é dominado pela radiação ou pela matéria não relativista (ver problema A.3).	0,5 pt.
-----	--	---------

Para resolver o problema, em algum instante da sua história inicial o universo deverá ter passado por um período de domínio por uma densidade de energia constante que levou a uma expansão exponencial, denominado período de inflação ou período inflacionário.

B.2	Para o período dominado pela densidade de energia constante, determinar $(\Omega(t) - 1)$ em função do tempo. Assuma que $(\Omega(t) - 1) \ll 1$.	0,3 pt.
B.3	Mostre que a condição para a inflação implica as várias condições seguintes: pressão negativa, expansão acelerada ($\ddot{a} > 0$), e diminuição do raio de Hubble ($d(aH)^{-1}/dt < 0$).	0,9 pt.
B.4	Mostre que a condição de diminuição do raio de Hubble pode ser expressa como $\epsilon < 1$, onde ϵ é o parâmetro $\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2}$.	0,2 pt.

Inflação ocorre enquanto $\epsilon < 1$ e a inflação termina quando $\epsilon = 1$. Podemos definir N que é a potência do número natural e que tem o valor de a , de forma que $dN = d \ln a = H dt$ e $N = 0$ no final da inflação.

C. Inflação gerada por uma distribuição homogénea de matéria

Um exemplo de um sistema físico simples que pode gerar um período de inflação é um universo

dominado por uma distribuição homogénea de matéria. Este tipo de matéria é chamado inflação e pode ser caracterizado por uma função $\phi(t)$.

A equação dinâmica da matéria pode ser expressa na forma

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V', \quad (3)$$

onde $V = V(\phi)$ é uma função potencial e $V' = \frac{\partial V}{\partial \phi}$. O parâmetro de Hubble satisfaz

$$H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \right]. \quad (4)$$

onde M_{pl} é uma constante denominada massa de Planck reduzida. A fase de inflação ocorre quando existe um domínio da energia potencial sobre a energia cinética $\dot{\phi}^2/2$ durante tempo suficiente de modo a que o termo $\ddot{\phi}$ na equação (3) pode ser desprezado. Esta condição é chamada aproximação de "slow-roll".

As quantidades ϵ e $\eta_V = \delta + \epsilon$, onde $\delta = -\ddot{\phi}/H(\dot{\phi})$, são denominados parâmetros de "slow-roll".

C.1	Estime o parâmetro ϵ , o parâmetro η_V , e o $dN/d\phi$ em função do potencial $V(\phi)$ e das suas primeira e segunda derivadas (V' e V'').	1,7 pt.
-----	--	---------

D. Inflação com um potencial simples

As previsões de qualquer modelo inflacionário devem ser comparadas com as restrições que resultam dos dados observacionais do CMB: $n_s = 0,968 \pm 0,006$ e $r < 0,12$, onde $r = 16\epsilon$ e $n_s = 1 + 2\eta_V - 6\epsilon$ são calculados para $\phi = \phi_{start}$ para o modelo inflacionário gerado por matéria dominante. Assuma que o potencial da matéria tem a forma simples $V(\phi) = \Lambda^4 \left(\frac{\phi}{M_{pl}} \right)^n$ onde n é um inteiro e Λ é uma constante.

D.1	Calcule ϕ_{end} no final da inflação.	0,5 pt.
D.2	Exprima r e n_s em função do número N e do inteiro n . Estime o valor de n que permite obter valores próximos dos observacionais para r e n_s . Use $N = 60$ no seu cálculo.	0,9 pt.

Código do Estudante						
----------------------------	--	--	--	--	--	--

A. Expansão do Universo

Questão	Resposta	Classificação
A.1 (1,3 pt.)	$A_1 =$	
A.2 (0,9 pt.)	$A_2 =$	
A.3 (1,2 pt.)	(i) $w_r =$ (ii) $w_m =$ (iii) $w_\Lambda =$	

A. Expansão do Universo

Questão	Resposta	Classificação
A.4 (1,2 pt.)	(i) $a(t) =$ (ii) $a(t) =$ (iii) $a(t) =$	
A.5 (0,1 pt.)		
A.6 (0,3 pt.)		

B. Motivação para Introduzir a Fase Inflacionária e as suas Condições Gerais

Questão	Resposta	Classificação
B.1 (0,5 pt.)	$(\Omega - 1) =$	
B.2 (0,3 pt.)	$(\Omega - 1) =$	

B.3 (0,9 pt.)		
B.4 (0,2 pt.)		

C. Inflação Gerada por uma Distribuição Homogénea de Matéria

Questão	Resposta	Classificação
C.1 (1,7 pt.)	$\epsilon \approx$ $\eta_V \approx$ $\frac{dN}{d\phi} \approx$	

D. Inflação com um Potencial Simples

Questão	Resposta	Classificação
D.1 (0,5 pt.)	$\phi_{final} \approx$	
D.2	$r =$	

(0,9 pt.)	$n_s =$	
-----------	---------	--