



XXI Olimpiada Iberoamericana de Física

Carmelo - Uruguay
26 - 30 Setiembre 2016



Carmelo, 28 de setembro de 2016

Prova Teórica

- O tempo disponível é 5 horas.
- Cada problema deve ser respondida em diferentes páginas, não misturar problemas em uma faceta. Pedir mais folhas se tal for necessário.
- Podem-se utilizar todas as folhas de rascunho que forem necessárias. Contudo estas não se devem entregar como folha de resposta.
- A correção dos problemas será anônima, por isso as folhas de resposta não devem conter nenhum dado que possa identificar o(a) aluno(a).
- O talão abaixo preenchido deve ser entregue junto com as folhas de resposta.
- Todas as folhas de resposta deverão estar numeradas da seguinte forma:
número da página / número total de páginas.

BOA PROVA!

Sobrenome:

Nome:

País:

Número de folhas entregues:

Assinatura



XXI Olimpiada Iberoamericana de Física

26 - 30 Setiembre 2016, Carmelo, Uruguay



PROVA TEÓRICA Problema Nº 1

O LIGO no ano das Ondas Gravitacionais (e no seu centenário).

Albert Einstein desenvolveu a Teoria Relatividade Geral (RG) numa série de artigos que publicou entre 1915 e 1916. Esta teoria alterou o conceito newtoniano de espaço, tempo e de gravitação. A equação para o campo gravitacional na RG descreve como a massa e a energia modificam a geometria do espaço-tempo. Nas palavras do grande físico John Wheeler:

*" A matéria diz ao espaço-tempo como se curvar.
O espaço-tempo diz à matéria como se mover. "*



Entre outras coisas, a RG prevê a existência de fenómenos/fenômenos exóticos como os buracos negros e as ondas gravitacionais. Os buracos negros são objetos tão massivos que curvam o espaço-tempo de maneira que nem a luz pode escapar deles. As ondas gravitacionais são oscilações do espaço-tempo que se propagam à velocidade da luz. A passagem de uma onda gravitacional modifica o espaço-tempo de tal modo que uma distância L entre dois pontos se vê alterada por uma quantidade ΔL . A *deformação* (strain) h de uma onda gravitacional é definida como o quociente entre ambos,

$$h = \frac{\Delta L}{L} \quad (1)$$

Em geral estas ondas são muito pouco intensas, a menos que as massas e acelerações envolvidas sejam extremamente altas. Os melhores candidatos a fontes de ondas gravitacionais observáveis são objetos astronômicos/astronômicos extraordinários, como por exemplo sistemas de estrelas binárias muito próximas que rodam a grande velocidade. Mesmo assim, as ondas produzidas são tão fracas que se duvidou por muito tempo que se pudessem detectar diretamente. Segundo a RG, a potência P emitida na forma de ondas gravitacionais por um sistema binário é dada aproximadamente por

$$P \approx \frac{c^3}{G} (\pi h f r) \quad (2)$$

onde h é a deformação a uma distância r da fonte e f é a frequência do sinal detectado. $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ é a constante de gravitação universal e $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m/s}$ é a velocidade da luz.

Devido à fraca intensidade do sinal produzido pelas ondas gravitacionais, a observação direta deste fenómeno/fenômeno é um desafio que necessitou avanços tecnológicos excepcionais. Ronald Drever, Rainer Weiss e Kip Thorne estão entre os primeiros cientistas que propuseram a detecção de ondas gravitacionais através da interferometria. Foi então criado o projeto LIGO (Light Interferometer Gravitational-wave Observatory), que é constituído atualmente por dois observatórios: o **Ligo Hanford** e o **LIGO Livingston que se encontram a uma distância de 3002 km um do outro**. Estes observatórios podem ser visualizados como dois microfones gigantes que permitem detectar as vibrações gravitacionais do espaço-tempo do mesmo modo que um microfone detecta as vibrações das ondas sonoras.

Cada observatório é composto por dois braços perpendiculares entre si, **cada um com 4,0 km de comprimento**. O efeito de uma onda gravitacional é reduzir as distâncias numa direção e aumentar simultaneamente as distâncias na direção perpendicular. Deste modo, quando uma onda gravitacional passa pelo interferómetro/interferômetro, o comprimento dos braços oscila com a mesma frequência da onda gravitacional: quando o comprimento de um dos braços diminui, o do outro braço aumenta, e vice-versa. Para medir estas deformações produzidas pela onda gravitacional é usado um sistema constituído principalmente por um LASER e por vários espelhos (Fig.1). Para reduzir as vibrações produzidas pelo meio envolvente os espelhos estão pendurados numa suspensão quádrupla similar a uma combinação de pêndulos.

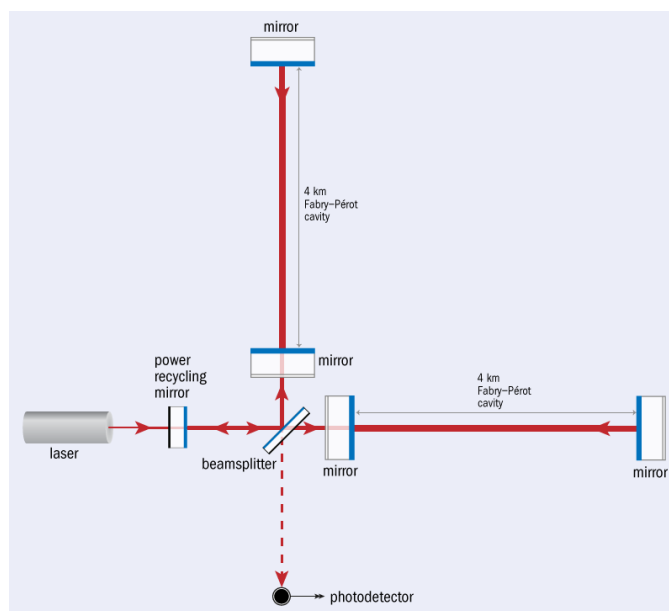


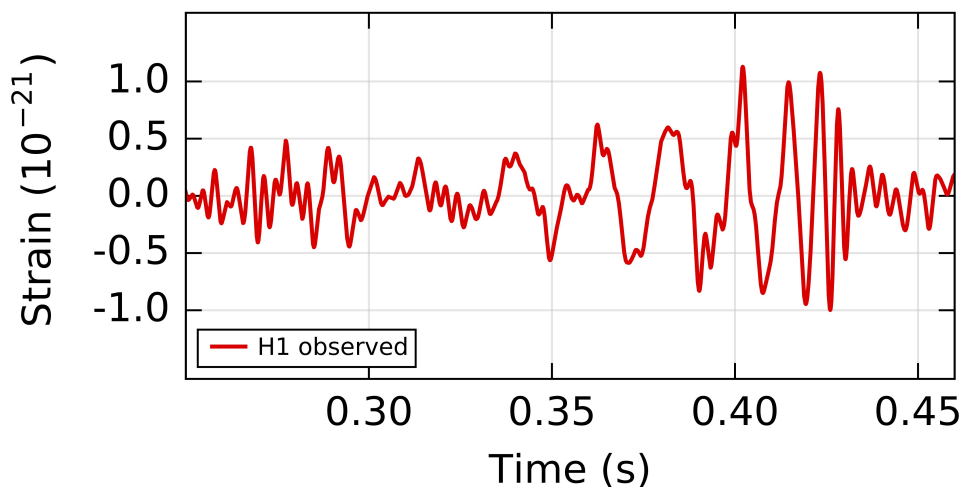
Fig. 1 - Esquema do interferômetro/interferómetro

Imediatamente após uma atualização do equipamento (Advanced LIGO) concluída em agosto de 2015, o LIGO teve o seu grande dia em 14 de setembro de 2015. Nesse dia foi observada uma onda gravitacional pela primeira vez na história, mesmo a tempo de celebrar os 100 anos da previsão teórica de ondas gravitacionais realizada por Einstein.

O sinal detectado pelos dois observatórios está mostrado na Fig.2 (deformação h em função do tempo). **As ondas gravitacionais foram detectadas primeiro no LIGO Livingston e 6,9 ms mais tarde no LIGO Hanford.**

A análise do sinal concluiu que as ondas gravitacionais observadas eram compatíveis com ondas geradas no colapso de um sistema binário de dois buracos negros com massas aproximadas $m_A = 35 M_S$ e $m_B = 30 M_S$, onde $M_S = 2,0 \times 10^{30} \text{ kg}$ é a massa do Sol. A este evento deu-se o nome de GW150914 (Gravitational Wave 2015 September 14).

A descoberta foi anunciada publicamente no dia 11 de fevereiro de 2016, juntamente com a publicação do artigo científico correspondente na revista Physical Review Letters, inaugurando assim a nova era da astronomia de ondas gravitacionais.

Fig. 2 – Sinal detectado nos observatórios LIGO. Deformação (*strain*) h em função do tempo t .

Neste problema serão explorados alguns aspetos da física do evento GW150914.

PARTE 1. “Escutar o universo”: Detecção de ondas gravitacionais. (2 pontos)

1a) (0,9 pontos) Para ter uma noção da sensibilidade do LIGO, considere uma abelha com 0,10 g de massa que se encontra a 10 m de um dos espelhos. Determine o deslocamento d que a abelha produz nesse espelho devido à atração gravítica que exerce. Considere um modelo simplificado no qual o espelho se encontra suspenso num pêndulo simples de comprimento 1,0 m. Este tipo de perturbação no instrumento designa-se por “ruído newtoniano”.

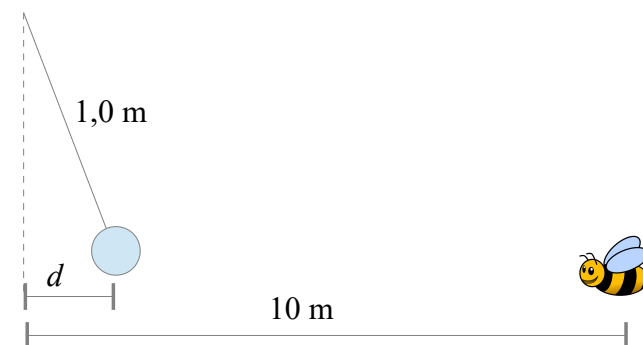


Fig. 3 – Diagrama para a parte 1a.

1b) (0,4 pontos) A partir da informação do sinal observado (Fig.2), determine o deslocamento máximo do espelho quando passou a onda gravitacional. Compare esta distância com a calculada na pergunta anterior e com a ordem de magnitude de um protão/próton (igual a 1 femtômetro/femtômetro).

1c) (0,7 pontos) Determine a direção da fonte que originou as ondas gravitacionais. Com este objetivo, calcule o ângulo θ entre o vetor posição da fonte e o plano perpendicular ao segmento de reta que une os dois observatórios. (Com a informação disponível só podemos determinar um arco possível para a localização da fonte.)

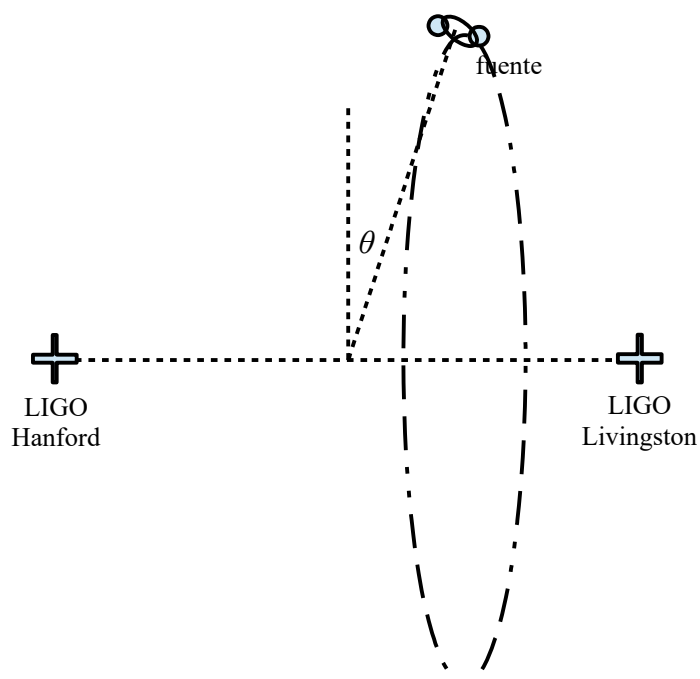


Fig. 4 – Diagrama para a parte 1c (fora de escala)

PARTE 2. “Dança cósmica”: Sistemas binários. (3,5 pontos)

Considere um sistema binário formado por duas estrelas com massas m_A e m_B . Cada uma se move num movimento circular uniforme em torno do centro de massa do sistema. A distância entre as duas estrelas é a . Considere um modelo newtoniano sem correções relativistas.

2a) (1,3 pontos) Determine a frequência f de rotação do sistema.

2b) (0,7 pontos) Determine o módulo da velocidade de cada estrela v_A e v_B , em função da distância a e das massas m_A e m_B .

2c) (0,9 pontos) Determine a energia mecânica do sistema E , em função da distância e das massas.

2d) (0,6 pontos) De acordo com o que calculou até agora, se por algum motivo o sistema perder energia:

2d1) Como varia a distância entre as estrelas? Aumenta, diminui ou se conserva?

2d2) Como varia a frequência?

2d3) Como varia a velocidade?

Justifique as suas respostas.

PARTE 3. “Música das esferas”: Radiação das ondas gravitacionais. (2,5 pontos)

De acordo com a teoria newtoniana da gravidade, os sistemas binários deveriam ser estáveis, mantendo-se perpetuamente em órbita. No entanto, de acordo com a RG, certos sistemas acelerados emitem ondas gravitacionais como as cargas elétricas aceleradas também emitem ondas eletromagnéticas. Isto significa que os sistemas gravitacionais não são estáveis: devido à emissão da radiação gravitacional, o sistema perde energia e, conseqüentemente, a distância entre os corpos diminui. Este processo pode ser estudado, de uma forma aproximadamente quase-estática, utilizando apenas a física newtoniana, até a distância entre as estrelas ser igual à

mínima distância de órbita estável (ISCO, innermost stable circular orbit). De acordo com a RG, $a_{ISCO} = \frac{6GM}{c^2}$,

onde M é a massa total do sistema. Quando o sistema atinge este ponto, os corpos começam a cair rapidamente da direção um do outro, e é necessário utilizar a RG (e super-computadores) para prever o seu movimento exato.

Finalmente dá-se uma colisão entre os dois corpos, e se forem objetos compactos (como estrelas de nêutrons/nêutrons, buracos negros, etc.), acabam por se fundir num objeto que continua emitindo ondas gravitacionais até se estabilizar.

Suponha que em $t = 0$, os dois buracos negros se encontram a uma distância muito grande, de tal forma que a energia mecânica do sistema se pode considerar praticamente nula, $E_0 = 0$. Ao interagir gravitacionalmente, eles começam a orbitar em torno do seu centro de massa. Através do mecanismo de radiação gravitacional o sistema perde energia de modo que em $t = t_{ISCO}$ a distância entre os dois buracos negros é $a = a_{ISCO}$.

Para os dois buracos negros correspondentes ao evento observado no instante $t = t_{ISCO}$:

3a) (0,7 pontos) Determine a distância entre eles.

3b) (0,6 pontos) Determine a frequência de rotação do sistema.

3c) (0,6 pontos) Determine o módulo da velocidade de cada buraco negro.

3d) (0,6 pontos) Determine a energia gravitacional libertada pelo sistema entre $t = 0$ e $t = t_{ISCO}$.

PARTE 4. “Conclusão”: Colapso e diminuição da massa. (2 pontos)

Depois de $t = t_{ISCO}$, o sistema binário colapsou em apenas 20 ms, e os buracos negros fundiram-se num só com uma massa $m = 62 M_S$.

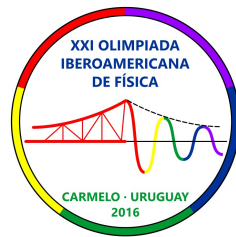
4a) (0,7 pontos) Determine a potência irradiada pelo sistema durante esses 20 ms. Expresse essa potência num múltiplo da luminosidade do Sol ($L_S = 3,85 \times 10^{26}$ W).

4b) (1,3 pontos) A partir da potência calculada e da amplitude do sinal detectado (Fig.2), estime a distância, em anos-luz, a que se encontrava o sistema binário que gerou as ondas gravitacionais observadas. (Segundo a Fig.2, a frequência do sinal observado na região de máxima amplitude do sinal é aproximadamente 150 Hz.)



XXI Olimpiada Iberoamericana de Física

26 - 30 Setiembre 2016, Carmelo, Uruguay



PROVA TEÓRICA Problema N° 2

Smartphone: um laboratório de bolso.

Os smartphones ou telefones inteligentes tornaram-se, nos últimos anos, onnipresentes e a sua utilização foi bem mais longe do que o inicialmente previsto, sendo utilizados inclusive no ensino da Física. A capacidade de processamento destes dispositivos, em conjunto com os sensores incorporados, converteram-nos em verdadeiros laboratórios portáteis, capazes de medir diferentes quantidades físicas como a aceleração, a velocidade angular, o campo magnético, a luminosidade, a pressão e outras.

O acelerómetro/acelerômetro e o giroscópio são dos seus sensores mais utilizados. O primeiro mede a aceleração e o segundo mede a velocidade angular. Ambos os sensores são tri-axiais ou seja são conjuntos de três sensores que medem as três componentes ortogonais de cada quantidade, segundo um sistema de eixos de referência solidário com o dispositivo, tal como se mostra na figura 1; o eixo dos z é perpendicular ao ecrã/tela do smartphone.

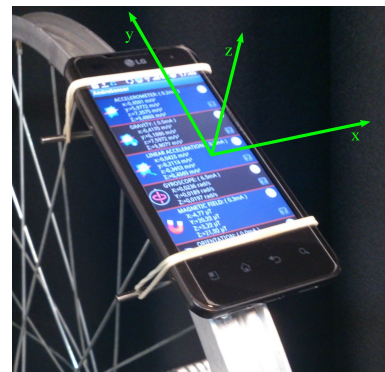


Fig. 1 – Ejes convencionales de un smartphone.

Parte 1: Sensor de aceleração. (4 pontos)

O acelerómetro/acelerômetro é um sensor microscópico que mede, na realidade, força por unidade de massa.

O acelerómetro/acelerômetro é um sensor microscópico que, de uma forma simplificada, se pode modelar como uma partícula de massa m (massa de prova) ligada a uma mola com constante elástica k . Quando o sistema é acelerado, a massa de prova move-se e deixa a posição de equilíbrio. Para determinar o deslocamento da massa de prova e, conseqüentemente, determinar a aceleração podem ser usadas diferentes tecnologias como piezoelétrica, piezoresistiva ou capacitiva. Podemos entender o funcionamento de um acelerómetro/acelerômetro que se baseia na tecnologia capacitiva com a montagem ilustrada na Fig. 2, onde uma placa metálica quadrada de área A e massa desprezável está ligada a uma massa de prova e é paralela a uma segunda placa metálica fixa, formando um condensador/capacitor de capacidade C_x . Quando a força da mola é nula, as placas estão separadas por uma distância d . O eixo do sensor é definido como a direção em que a massa de prova tem liberdade para se movimentar (neste caso a direção ao longo do comprimento da mola). Em todo este problema considere que as forças electrostáticas são desprezáveis.

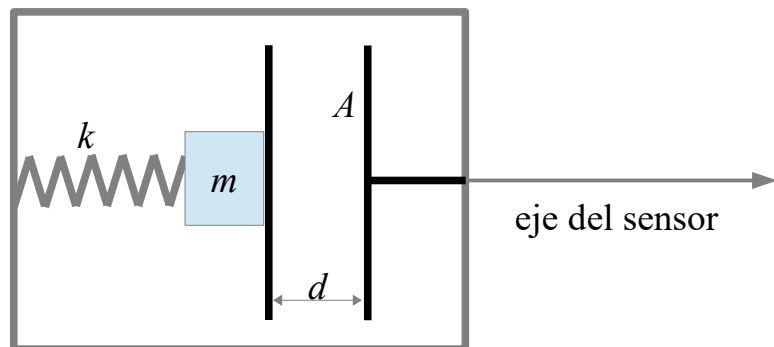


Fig. 2 – Esquema simplificado de um acelerómetro/acelerômetro com tecnologia capacitiva.

No nosso caso vamos considerar um acelerómetro/acelerômetro simplificado que se baseia na tecnologia dissipativa como se mostra na Fig. 2.

1a) (0,6 pontos) Considerando que o eixo do sensor permanece horizontal, determine o deslocamento s da placa à esquerda no condensador/capacitor quando o sistema se move com uma aceleração constante a para a direita. Considere que os deslocamentos para a direita são positivos.

1b) (1,7 pontos) Determine C_x como uma função linear da aceleração considerando $s \ll d$. A capacidade C_x quando $s = 0$ define-se como sendo C_0 .

[Sugestão: Recorde que se $u \ll 1$, então $(1 + u)^n \approx 1 + n u$.]

O condensador/capacitor C_x liga-se a um outro condensador/capacitor fixo C_0 . O sistema formado por C_x e C_0 permanece isolado e carregado de modo a que quando $s = 0$, a diferença de potencial entre as placas dos condensadores/capacitores seja V_0 .

1c) (1,7 pontos) Mostre que a diferença de potencial V_s entre as placas dos condensadores/capacitores é, aproximadamente, uma função linear da aceleração do sensor e é dada por

$$V_s = V_0 (1 + \beta a).$$

Determine β em função dos parâmetros do acelerómetro/acelerômetro.

Parte 2: Princípio de equivalência. (1,8 pontos)

Uma das ideias mais brilhantes de Einstein é o princípio de equivalência o qual afirma que, num sistema isolado, é impossível distinguir entre um campo gravitacional e um referencial não-inercial (acelerado). Suponha que o acelerómetro/acelerômetro é colocado no chão de um elevador/ascensor com o seu eixo orientado verticalmente e para cima.

Determine a aceleração a reportada pelo sensor nos seguintes casos:

2a) (0,6 pontos) o elevador/ascensor permanece em repouso em relação à Terra;

2b) (0,6 pontos) o elevador/ascensor está em queda livre;

2c) (0,6 pontos) o elevador sobe com aceleração a' .

Parte 3: Pêndulo físico (4,2 pontos)

Uma barra de comprimento L e massa M pode rodar livremente num plano vertical, em relação a um eixo que passa por um dos seus extremos. No outro extremo é fixado um smartphone de tal forma que o seu eixo y aponte para o eixo de rotação, o eixo z é paralelo ao eixo de rotação e o eixo dos x é perpendicular à barra. O smartphone tem massa m e pode ser tratado como uma massa pontual que se encontra à distância L do eixo de rotação. Considere que o momento de inércia total da barra e do smartphone é I . Considera-se um outro sistema cartesiano (x', y') , com origem no eixo de rotação, sendo x' o eixo horizontal como se indica na figura 3.

O acelerómetro/acelerômetro do smartphone dá os valores de a_x , a_y e a_z e o giroscópio reporta os valores da velocidade angular ω_x , ω_y e ω_z . É importante destacar que para esta configuração do sistema se tem sempre, em todos os instantes, $a_z = 0$, $\omega_x = 0$ e $\omega_y = 0$ independentemente das condições iniciais.

Determine a posição do smartphone no sistema de referencia (x', y') , em função dos parâmetros do pêndulo (M , L , m , I) e das medidas efetuadas com o telemóvel/celular (a_x , a_y , e ω_z) num certo instante de tempo.

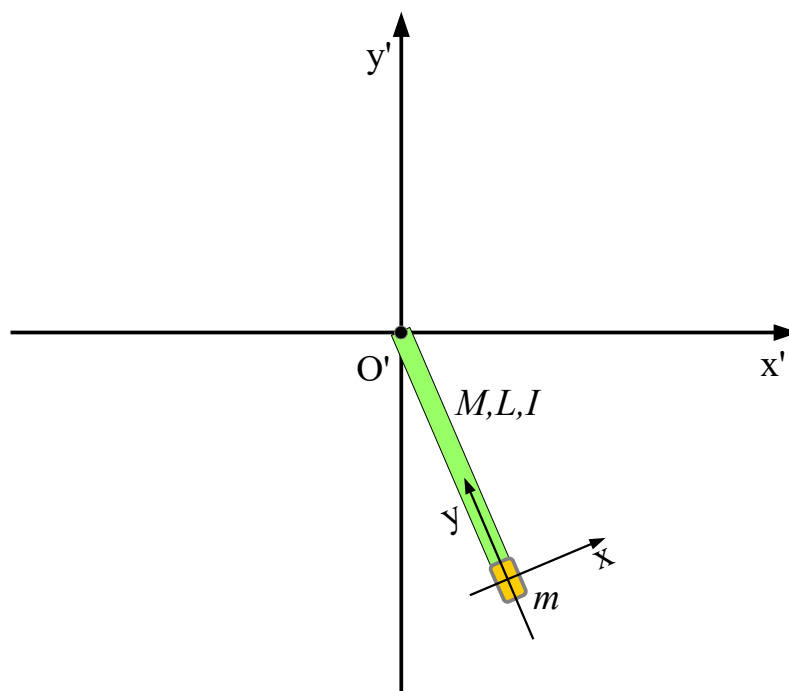


Fig. 3 – Barra com smartphone que pode girar livremente em relação à origem de coordenadas O' .

PROVA TEÓRICA Problema N° 3

Propulsor magnetohidrodinâmico.

Um propulsor magnetohidrodinâmico elementar (MHD), que consiste em uma caixa oca de comprimento L , largura a e altura h , é submerso em um fluido com condutividade elétrica σ (a condutividade é definida como o inverso da resistividade). A face inferior e a superior da caixa são metálicas e estão ligadas a uma fonte de corrente contínua com diferença de potencial V , que estabelece uma corrente elétrica perpendicular às placas. As faces de dimensões L e h , são dois ímanes/ímãs retangulares não condutores, de modo que dentro da caixa se estabelece um campo magnético de módulo B , que será dito aproximadamente uniforme, horizontal na direção indicada na figura 1.

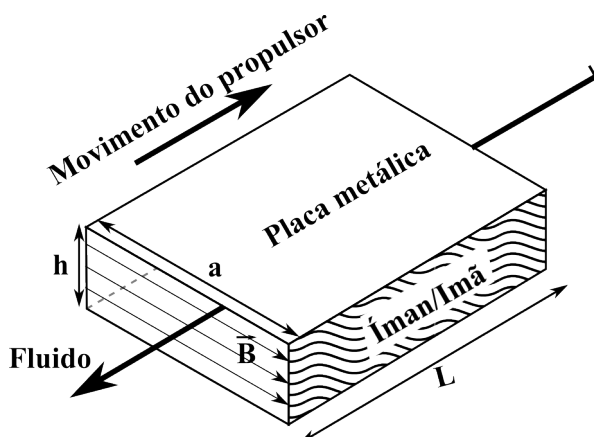


Fig. 1 - Vista em perspectiva do propulsor MHD.

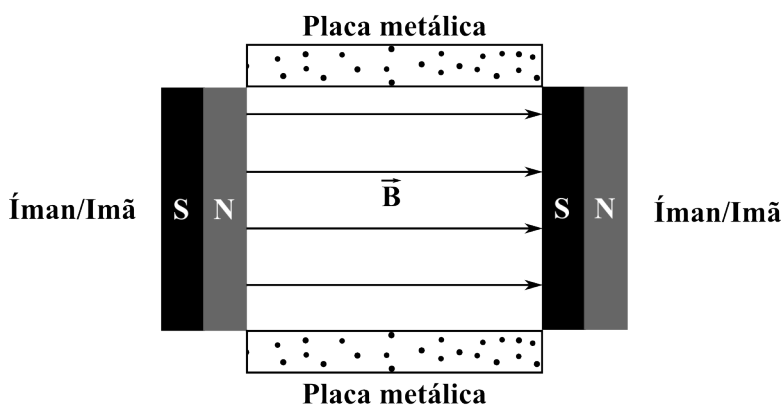


Fig. 2 - Vista traseira do propulsor MHD.

a) (1,4 pontos) Para que o propulsor seja impulsionado para a direita, determine se a placa superior é positiva ou negativa, justificando a sua resposta.

Escreva a expressão para a força aplicada pelo propulsor MHD sobre o fluido.

b) (2,8 pontos) Para o par de ímanes/ímãs considerados, a intensidade do campo magnético depende da distância a , e é dada por $B(a) = 0,42 - 14a$, onde a é dado em metros e B em Tesla. Esta relação linear é válida para distâncias compreendidas entre 0,005 m e 0,025 m.

Escreva a expressão para a distância a entre os ímanes/ímãs para qual a força gerada pelo propulsor MHD é máxima e determine o seu valor.

Determine o valor do campo magnético para essa distância.

c) (1,4 pontos) Se constrói um propulsor MHD para funcionar em água salgada, com a largura a calculada no item anterior, comprimento $L = 12$ cm e altura $h = 2,0$ cm. A fonte é uma bateria de $V_0 = 9,0$ V e resistência interna $r_i = 1,1 \Omega$. A condutividade elétrica da água salgada é $\sigma = 4,8 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$.

Escreva a expressão para a intensidade de corrente elétrica e determine o seu valor.

Determine a força gerada pelo propulsor MHD.

d) (4,4 pontos) Constrói-se um pequeno barco de brinquedo que é impulsionado pelo propulsor MHD do item anterior. O barco é uma caixa prismática de 10 cm de largura, 6 cm de altura e com o mesmo comprimento do propulsor (Fig. 3). A massa total do barco, incluindo a bateria e o propulsor é $m = 215$ g.

Ao mover-se, a água se opõe ao movimento do barco com uma força de arrasto/atrito que é da forma $F_a = \frac{1}{2} \rho C A v^2$, onde $\rho = 1,02 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ é a densidade da água com sal, C é o coeficiente de arrasto, que depende do formato do barco, e vale nesse caso $C = 1,2$, A é a área frontal em contato com a água e v é a velocidade relativa entre o barco e a água.

Escreva a expressão para a velocidade terminal (aceleração nula) com que o barco viaja e determine seu valor.

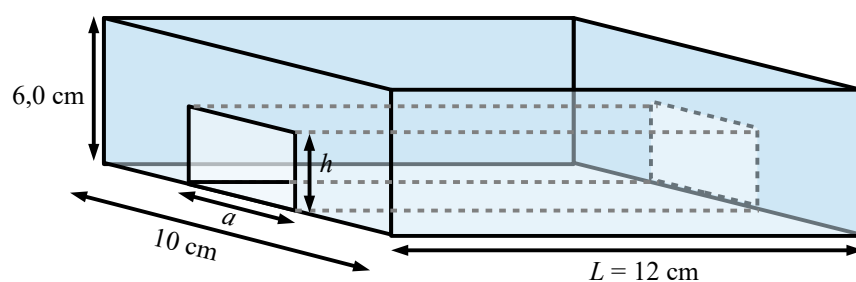


Fig. 3 - Dimensão do barco de brinquedo