



SOCIEDADE PORTUGUESA DE FÍSICA

## Olimpíadas de Física 2016

Seleção para as provas internacionais

Prova Teórica

Nome: \_\_\_\_\_

Escola: \_\_\_\_\_

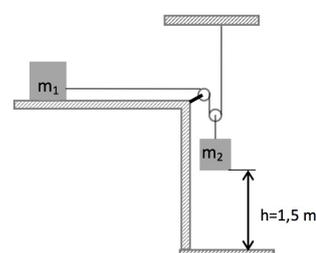
21/maio/2016

## Prova Teórica

Duração da prova: 4h

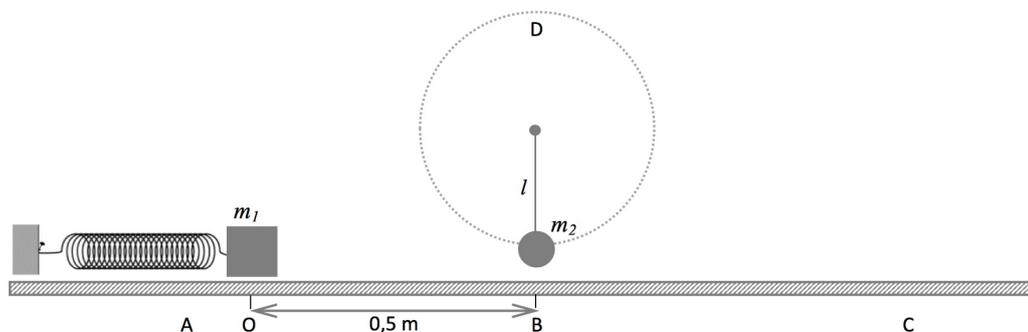
### I Vários tópicos

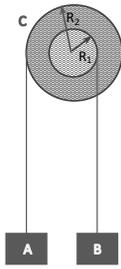
1. Na figura estão representados dois blocos:  $m_1$  de massa 2 kg e  $m_2$  de massa 0,5 kg. O coeficiente de atrito entre o bloco  $m_1$  e o plano horizontal é  $\mu = 0,1$ . O bloco  $m_2$  encontra-se inicialmente em repouso a uma altura do chão  $h = 1,5$  m. Considere desprezáveis os atritos e as massas das roldanas. Calcule:



- (a) as tensões nos fios e as acelerações dos blocos;
- (b) a energia cinética de cada um dos blocos no instante em que  $m_2$  chega ao chão;
- (c) a variação de energia mecânica do sistema.
2. A figura representa um bloco de massa  $m_1 = 0,3$  kg em repouso na posição  $x = 0$ . Nesta posição é nula a força exercida pela mola elástica de constante  $k = 3,2 \times 10^3$  N/m. O bloco é deslocado até à posição A, comprimindo a mola. Ao ser abandonado colide com a esfera de massa  $m_2 = 0,1$  kg que está suspensa por um fio de comprimento  $\ell = 0,9$  m. A colisão é frontal e perfeitamente elástica. O coeficiente de atrito entre  $m_1$  e a superfície horizontal é  $\mu = 0,1$ . Considere  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.

- (a) Determinar a velocidade mínima que  $m_2$  deve ter no ponto D para que a esfera descreva a circunferência completa de raio  $\ell$ .
- (b) Calcule a posição do ponto A correspondente à menor compressão da mola para que  $m_2$  descreva a circunferência completa.





3. A figura representa dois blocos A e B, iguais, de massas  $m = 0,5 \text{ kg}$ . Os blocos estão suspensos por dois fios num cilindro C de massa  $m_c = 2 \text{ kg}$ , sendo  $R_1 = 10 \text{ cm}$ ,  $R_2 = 20 \text{ cm}$  e  $I = \frac{1}{2}m_c R_2^2$ . O sistema está inicialmente em repouso.

- Determine a relação  $v_A/v_B$  das velocidades dos dois blocos.
- Calcule as tensões nos dois fios e as acelerações dos dois blocos.
- Calcule a energia cinética do sistema ao fim de  $2 \text{ s}$  de movimento.

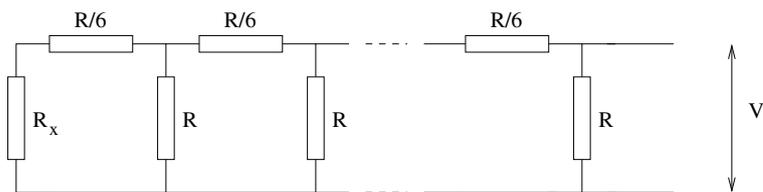
4. Um rio com  $1 \text{ km}$  de largura corre com velocidade de  $2 \text{ km/h}$ . Determine o tempo necessário para um homem ir e voltar diretamente de uma margem à outra. Compare esse tempo com o que é necessário para outro homem nadar  $1 \text{ km}$  rio acima e regressar ao ponto de partida. Os nadadores nadam a uma velocidade constante de  $3 \text{ km/h}$ . Qual deveria ser a velocidade da corrente para que os dois trajetos tivessem durações que diferissem por  $6 \text{ minutos}$ ?

5. Um observador A observa um foguete que se desloca no espaço com uma velocidade  $v$ , próxima de  $c$ . Este expelle um jato com uma velocidade  $u \ll c$  relativamente ao referencial em que o foguete está em repouso.

- Qual é a velocidade do jato no referencial do observador A?
- O foguete parte do repouso, sendo  $m_0$  a sua massa inicial. À medida que vai expelindo o jato, a massa do foguete vai diminuindo e ele aumenta a sua velocidade. Relacione a velocidade  $v$  do foguete com a massa  $m$  no referencial do foguete.

## II A Geringonça Elétrico-Mecânica

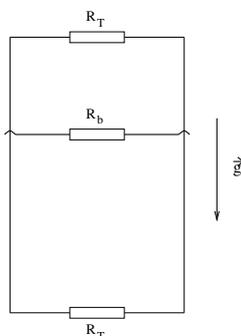
1. Alguém com muito tempo e equipamento elétrico disponíveis resolveu montar a seguinte associação de resistências.



Sabendo que  $R = 180 \Omega$ , qual é o valor da resistência  $R_x$  que deve ser utilizada de modo a que a resistência total  $R_T$  desta associação seja independente do número de malhas? Qual é o valor de  $R_T$  nesse caso?

2. A resistência  $R_x$  é na realidade constituída por duas barras condutoras com o mesmo comprimento  $L = 1,0 \text{ cm}$  e com a mesma secção quadrada de lado  $0,10 \text{ mm}$ . Sabendo que uma das barras tem o dobro da resistividade da outra, qual é a resistividade de cada uma das barras? Qual é a carga que fica distribuída na superfície que une as duas barras em função da corrente que atravessa a resistência? Escreva esta carga em função do número de malhas do circuito e da diferença de potencial a que os terminais são colocados.

3. De seguida duas destas associações de resistências são ligadas no seguinte circuito que está representado abaixo sujeito ao campo gravítico e a um campo magnético perpendicular ao circuito de intensidade  $B = 1,5 \text{ T}$ . A barra móvel tem uma resistência  $R_b$  e uma massa  $m_b$ .



Esboce o gráfico do valor da corrente na barra móvel em função do tempo, indicando no gráfico a expressão para a corrente máxima e para o tempo característico da dinâmica do sistema em função da massa  $m_b$  e da razão  $\frac{R_b}{R_T}$ .

4. Uma das associações de resistências  $R_T$  foi substituída por uma única resistência de secção quadrada de lado  $0,10 \text{ mm}$ , e colocada de forma a que as normais de duas das faces sejam colineares com a direção vertical. Quando a barra atinge a velocidade terminal verifica-se que em algumas das faces desta nova resistência existe uma acumulação de carga. Em que faces? Esta acumulação de carga cria um campo elétrico dentro da resistência que exerce uma força nas cargas móveis de modo a balançar a força magnética exercida pelo campo  $B$ . Calcule o valor da densidade de carga acumulada nas faces sabendo que a nova resistência é constituída por titânio de densidade  $\rho = 4,50 \text{ g/cm}^3$ , de massa atómica relativa  $47,87$ , e que a resistência  $R$  é igual a  $120 \Omega$ .
5. Em série com a resistência  $R_b$  é colocado um condensador de capacidade  $C$ . Neste caso a velocidade não atinge um valor terminal, e passado algum tempo pode ser escrita como  $v(t) = A_0 + A_1 t$ , onde  $A_0$  e  $A_1$  são funções de  $g$ ,  $b$ ,  $B$ ,  $m_b$ ,  $C$  e, no caso de  $A_0$  também das resistências  $R_b$  e  $R_T$ . Determine  $A_0$  e  $A_1$ . Qual é a corrente que atravessa a resistência  $R$  neste caso?
6. Se em vez do condensador estivesse ligado em série com a resistência  $R_b$  um indutor de indutância  $L$ , qual seria a frequência das oscilações da barra em torno do seu ponto de equilíbrio e qual seria a constante de amortecimento dessas oscilações?

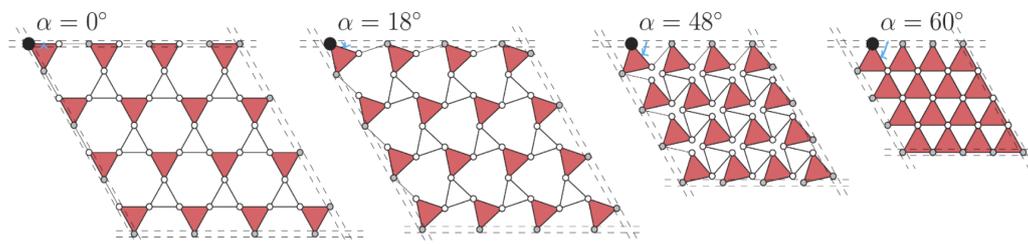
### III Pêndulo de Geometria Variável

Neste problema ir-se-á estudar uma estrutura semi-rígida que oscila num plano perpendicular à superfície da Terra como um pêndulo físico de geometria variável<sup>1</sup>. A estrutura possui apenas um grau de liberdade, isto é, só há uma forma de a deformar. Por isso, a sua configuração geométrica é completamente descrita por um único parâmetro, um ângulo  $\alpha$ .

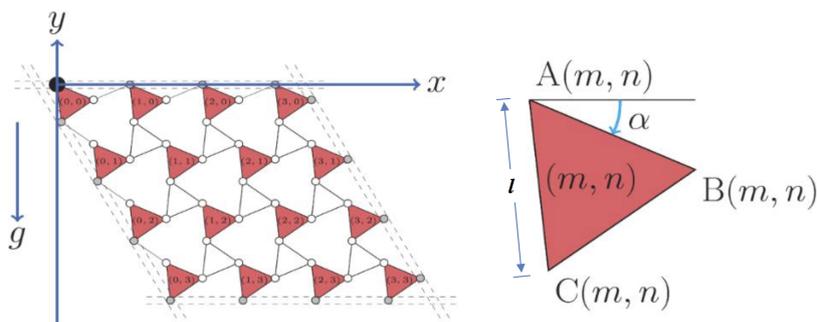
A estrutura está representada na figura seguinte. É formada por um conjunto de  $N^2$  placas triangulares idênticas, “amarradas” umas às outras por barras idênticas. Estas barras

<sup>1</sup>Estas estruturas foram extensivamente estudadas por James Clerk Maxwell no século XIX.

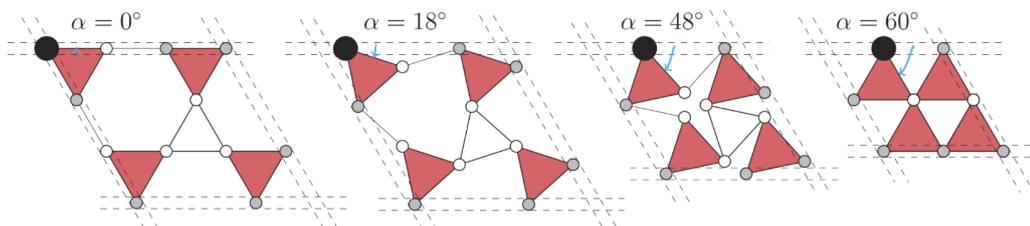
oscilam livremente em torno de juntas que se encontram nos três vértices de cada placa (e que estão indicados na figura por pequenos círculos). As placas triangulares são equiláteras e o seu lado tem comprimento  $\ell$ , que é também o comprimento de todas as barras de ligação. As placas e as barras são interligadas de modo a formar uma rede  $N \times N$  (com  $N > 1$ ) e toda a estrutura é depois “pendurada como uma cortina” em quatro tubos ocos (representados na figura por linhas a tracejado). O tubo que está no topo é colocado na horizontal. Os  $N$  vértices das placas triangulares que são inseridos nos tubos podem deslizar livremente no interior destes. Os tubos são rígidos e não se podem mover, sendo montados como indica a figura: o conjunto dos quatro tubos forma um paralelogramo com dois ângulos internos iguais a  $60^\circ$  e outros dois iguais a  $120^\circ$ . A massa de cada uma das placas triangulares é  $M$  e todas as outras partes do sistema possuem massa desprezável.



A configuração da rede é completamente determinada pelo ângulo  $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 60^\circ$ ), como se pode ver na figura acima. Para estudar este sistema deverá usar o sistema de coordenadas indicado na figura seguinte. Tome o nível  $y = 0$  como referência para o potencial gravítico. Cada placa triangular será identificada por um par de números  $(m, n)$  que indicam a sua posição relativa nas direções  $x$  e  $y$ , respetivamente ( $m, n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ). Os vértices de cada placa são designados por  $A(m, n)$ ,  $B(m, n)$  e  $C(m, n)$ . O vértice superior esquerdo ( $A(0, 0)$ ) está fixo. O sistema apenas se pode mover no plano  $xy$ . O momento de inércia de uma placa triangular equilátera de lado  $\ell$ , em relação a um eixo perpendicular à placa e que passa pelo seu centro de massa, é  $I = M\ell^2/12$ .



1. Considere  $N = 2$ .

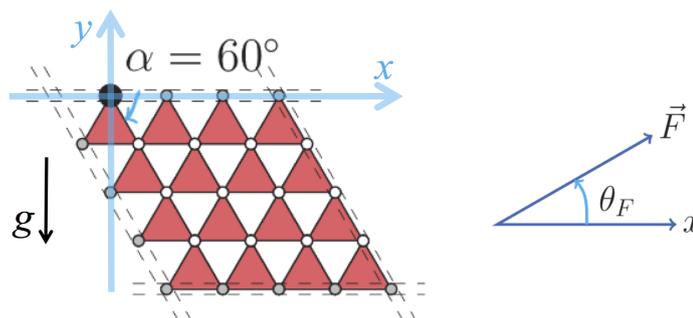


- Determine a posição do centro de massa de cada uma das placas triangulares para um ângulo  $\alpha$  qualquer.
- Obtenha uma expressão para a energia potencial do sistema em função do ângulo  $\alpha$  (e possivelmente das constantes  $M$ ,  $g$  e  $\ell$ ).
- O sistema fica em equilíbrio estático para um certo valor do ângulo  $\alpha$ . Determine esse valor (designado de ora em diante por  $\alpha_2$ ).
- Se o sistema estiver na configuração de equilíbrio e for ligeiramente perturbado, irá descrever um movimento harmónico simples em torno da posição de equilíbrio. Obtenha uma expressão para a energia potencial do sistema (para configurações próximas da configuração de equilíbrio) em função de  $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_2$ , o desvio em relação à configuração de equilíbrio.
- Obtenha uma expressão para a energia cinética de translação do sistema em função de  $\Delta\dot{\alpha} \equiv \frac{d}{dt}\Delta\alpha = \frac{d}{dt}\alpha$ . Sugestão: comece por determinar a velocidade do centro de massa de cada uma das placas.
- Determine a energia cinética total do sistema em função de  $\Delta\dot{\alpha}$ .
- Qual é a frequência de oscilação do sistema em torno de  $\alpha_2$ ?

2. Considere agora um valor arbitrário para  $N$ .

- Qual é agora o ângulo que identifica a configuração de equilíbrio ( $\alpha_N$ )?
- Quando  $N$  é grande, a variação da energia potencial do sistema enquanto este oscila em torno de  $\alpha_N$  varia com  $N$  de acordo com  $\Delta E_p \propto N^{\gamma_1}$ . Determine  $\gamma_1$ .
- A variação da energia cinética do sistema enquanto este oscila em torno de  $\alpha_N$  varia com  $N$  de acordo com  $\Delta E_c \propto N^{\gamma_2}$ . Estime  $\gamma_2$ .
- Como varia com  $N$  a frequência de oscilação?

3. É exercida uma força sobre um vértice de uma das placas triangulares que “congela” o sistema na configuração  $\alpha = 60^\circ$  (com  $N$  arbitrário).



- Que vértice se deve escolher para que se aplique a menor força possível?
- Qual é o valor desta força? E em que direção é a força? Identifique a direção através do ângulo  $\theta_F$  da figura.

## Transformações de Lorentz

As variáveis  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ,  $t'$ ,  $E'$ ,  $p'_x$ ,  $p'_y$  e  $p'_z$  correspondem às grandezas medidas num referencial que se desloca com velocidade  $\vec{v} = v\hat{i}$  em relação ao referencial inicial. De acordo com as transformações de coordenadas, em  $t = 0$  as origens dos dois referenciais são coincidentes.

$$E' = \frac{E - vp_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad p'_x = \frac{p_x - \frac{vE}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad p'_y = p_y \quad p'_z = p_z$$
$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad y' = y \quad z' = z$$

---

## Expressões potencialmente úteis

$$\text{Se } b \ll a, (a + b)^2 \simeq a^2 + 2ab.$$

$$\text{Se } x \ll 1, (1 + x)^{-1} \simeq 1 - x.$$

$$\sin(a) \pm \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a \pm b}{2}\right) \cos\left(\frac{a \mp b}{2}\right)$$

$$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a + b}{2}\right) \cos\left(\frac{a - b}{2}\right)$$

$$\cos(a) - \cos(b) = 2 \sin\left(\frac{a + b}{2}\right) \sin\left(\frac{a - b}{2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2/a^2}(1 + x/a)^2} = -\frac{a(2 + x/a)}{3(1 + x/a)^2} \sqrt{1 - x^2/a^2} + C$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} 1 = N$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{N(N-1)}{2}$$

## Constantes Físicas

$e$	$1,602176487 \times 10^{-19} \text{ C}$
$N_A$	$6,02214179 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
$k_B$	$1,3806504 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$
$\epsilon_0$	$8,854187817 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$
$c$	$299792458 \text{ m/s}$
$G$	$6,67428 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$
$h$	$6,62606896 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
$\hbar$	$1,054571628 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
$\sigma$	$5,670400 \times 10^{-8} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\text{K}^{-4}$
Constante de Wien	$2,8977685 \times 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{K}$
$\kappa_{\text{gelo}}$	$2,4 \text{ W K}^{-1}\text{m}^{-1}$
$L_{\text{gelo-água}}$	$3,3 \times 10^5 \text{ J/kg}$
$a_0$	$0,52917720859 \times 10^{-10} \text{ m}$
$u$	$1,660538782 \times 10^{-27} \text{ kg}$
$u$	$931,494028 \text{ MeV}/c^2$
$m_e$	$9,10938215 \times 10^{-31} \text{ kg}$
$m_e$	$510,998910 \text{ keV}/c^2$
$m_e$	$5,4857990943 \times 10^{-4} \text{ u}$
$m_p$	$938,272013 \text{ MeV}/c^2$
$m_n$	$939,565346 \text{ MeV}/c^2$
$m_\alpha$	$3727,379109 \text{ MeV}/c^2$
$M_{\text{Lua}}$	$7,3477 \times 10^{22} \text{ kg}$
$R_{\text{Lua}}$	$1,737 \times 10^6 \text{ m}$
$M_{\text{Terra}}$	$5,97219 \times 10^{24} \text{ kg}$
$M_\odot$	$1,98855 \times 10^{30} \text{ kg}$
$M_\odot \frac{G}{c^2}$	$1,48 \text{ km}$
1 pc	$3,2616 \text{ anos-luz}$
1 pc	$3,086 \times 10^{16} \text{ m}$