



SOCIEDADE PORTUGUESA DE FÍSICA

Olimpíadas de Física 2014

Seleção para as provas internacionais

Prova Teórica

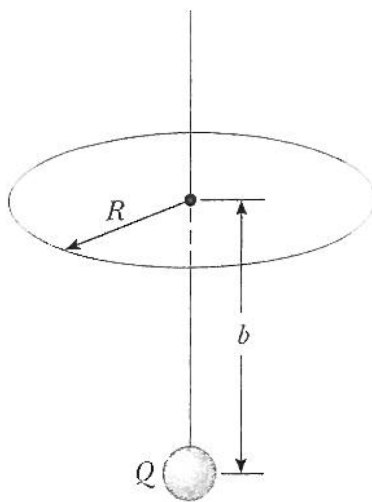
24/Maio/2014

Prova Teórica

Duração da prova: 4h

I Vários tópicos

1. De acordo com o modelo atômico de Bohr o momento angular orbital do eletrão num átomo é um múltiplo inteiro de \hbar ($= \frac{h}{2\pi}$). Recorrendo a este postulado e supondo que os eletrões descrevem órbitas circulares em torno do núcleo, mostre que só são permitidas órbitas de raio $a_0 n^2$ e determine a_0 . Determine a frequência da radiação emitida quando um eletrão no átomo de hidrogénio transita do primeiro estado excitado para o estado fundamental.
2. Dois fotões que se deslocam em direções diferentes mas que possuem a mesma energia E colidem. O ângulo entre as direções de propagação dos fotões é θ . Da colisão resulta a formação de uma partícula X de massa M . Determine o valor de M .
3. Uma carga pontual Q está colocada no eixo de um disco de raio R , à distância b do plano do disco. Mostre que, se $1/4$ do fluxo do campo elétrico da carga atravessar o disco, então $R = \sqrt{3} b$.



4. Considere um gás ideal de volume V_1 e temperatura T_1 que realiza um processo isotérmico e reversível até um volume V_2 . Seguidamente, o gás é colocado em contacto com uma fonte a uma temperatura T_2 , mantendo o seu volume constante, até que atinge o equilíbrio térmico com essa fonte. Qual a relação entre T_2 e T_1 de modo a que a variação de entropia do sistema seja nula na sequência destes dois processos? Calcule a variação de entropia do universo (sistema + resto do mundo) no final dos dois processos.

5. Num gás a pressões elevadas não se pode desprezar o tamanho das suas moléculas nem as forças que existem entre elas. Estas forças de atração levam a uma pressão mais baixa do que a pressão prevista pela lei dos gases ideais. Por outro lado, devido à contribuição do volume das moléculas, o volume ocupado pelo gás é maior do que o volume dado pela lei dos gases ideais. Em 1873 Van der Waals sugeriu a seguinte equação para um gás a altas pressões que leva em conta os dois efeitos acima mencionados:

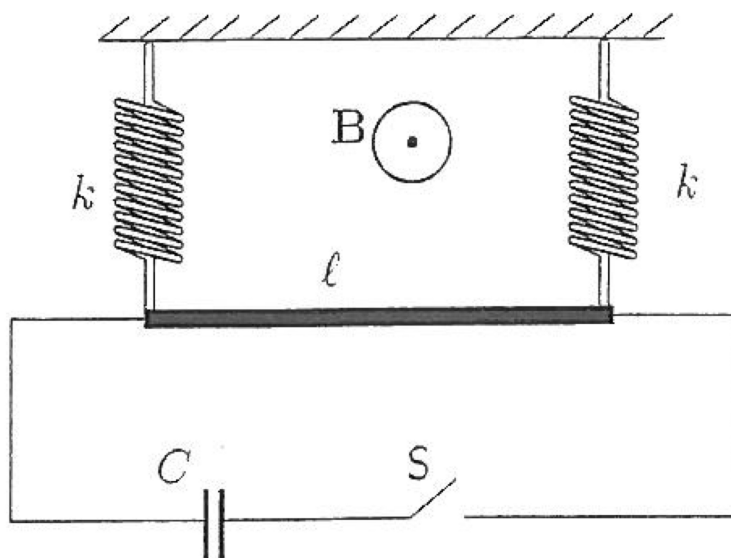
$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT,$$

onde a e b são dois parâmetros específicos de cada gás.

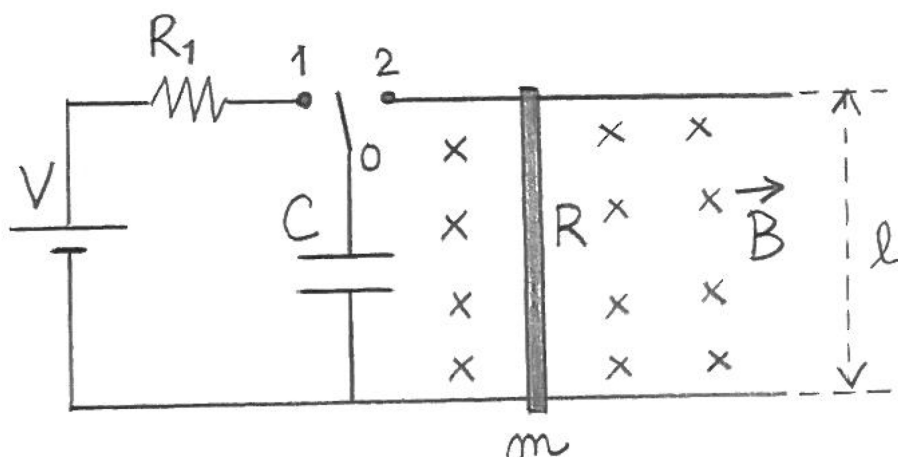
- Explique, de uma forma qualitativa, como esta equação toma em consideração tanto o efeito das forças de atração entre as moléculas do gás como o volume ocupado por elas. Relacione o parâmetro b com o diâmetro das moléculas do gás (assumindo estas que são esféricas).
- Calcule a relação entre C_p e C_v para um gás de Van der Waals em função de n , T e V .
- Mostre que para $a = 0$ esta relação é idêntica à que se obtém para gases ideais.

II Eletromagnetismo

1. Uma barra condutora de massa m e comprimento ℓ está na horizontal, suspensa por duas molas não condutoras de constante de elasticidade k . A barra encontra-se numa região onde existe um campo magnético uniforme \vec{B} . O condensador C é inicialmente carregado ficando ao potencial V . No instante $t = 0$, fecha-se o interruptor S e o condensador descarrega-se. A barra começa a oscilar no plano vertical. Determine a amplitude das oscilações, admitindo que o tempo de descarga do condensador é muito pequeno em comparação com o período T das oscilações da barra.



2. Desapontado com os resultados dos aparelhos fornecidos pela famosa loja ACME, Wile E. Coyote enviou uma carta ao famoso físico L.M. da reputada Universidade de Katmandu, pedindo os planos e especificações de um canhão eletromagnético. Passado algum tempo recebeu uma carta com a seguinte figura onde se encontra um trilho de carris condutores, de resistência desprezável, num plano horizontal, perpendicular a um campo magnético \vec{B} de intensidade 1,5 T. Sobre estes carris pode deslocar-se sem atrito uma barra metálica, de massa $m = 10$ g, comprimento $\ell = 10$ cm e resistência R . Numa das extremidades os carris estão ligados a um condensador de capacidade $C = 1$ mF. O circuito é alimentado por um gerador ACME-DC10 de corrente contínua que gera uma diferença de potencial de $V = 10000$ V.



Inicialmente estabelece-se a ligação 0-1 até o condensador ficar carregado com a carga $Q = CV$ e ter armazenada a energia $U = C\frac{V^2}{2}$. Uma vez atingida esta situação, muda-se o interruptor para a posição 0-2. A partir deste instante observa-se que a barra metálica começa a mover-se para a direita.

- Obtenha, em função da corrente $I(t)$ e dos dados do problema, a expressão da força responsável pelo movimento da barra.
- Devido ao movimento da barra surge no circuito uma força eletromotriz induzida ε . Exprima ε em função dos dados do problema e da velocidade da barra, $v(t)$.
- Decorrido algum tempo, a barra atinge uma velocidade máxima e a carga do condensador assume um valor constante. Determine a velocidade máxima que a barra atinge, v_{\max} e o valor mínimo da carga do condensador, q_{\min} . Exprese a velocidade máxima alcançada em km/h.
- Determine a percentagem da energia disponível que é transferida para a barra quando esta é “lançada” pelo canhão eletromagnético.
- O que acontece quando Wile E. Coyote tenta usar este equipamento fabuloso para apanhar um elemento da espécie *Supersonicus Tastius*?

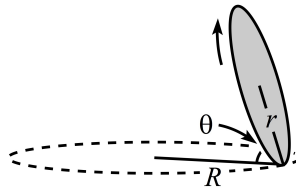
III Método de Monte Carlo

L.M. passou uma semana magnífica de “hiking” e “rafting” na zona de Gandaki e está agora de volta a Katmandu. Antes da partida para férias, L.M. tinha convidado vários porquinhos para uma grande festa no dia 24 de Maio. O canhão estava montado e estava na altura de o experimentar... Mas a beatitude em que lentamente mergulhara ao longo das férias desviava-lhe agora o espírito para empreitadas mais pacíficas. Incapaz de decidir se iria realmente experimentar o canhão, L.M. resolve entregar-se aos métodos de Monte Carlo, deixando a física dos projéteis nas mãos de um gerador de números aleatórios. E nada melhor que utilizar a sua moeda da sorte, uma moeda de ouro emitida em memória de Birendra Bir Bikram (ver figura) que é um disco de raio r e massa m perfeitamente homogêneo e extremamente fino.



No entanto, L.M. já analisou demasiados lançamentos de moedas ao ar e sempre teve alguma dificuldade em modelar corretamente o comportamento da moeda. A interação com o ar e o processo de lançamento da moeda com o habitual gatilho de polegar introduzem demasiadas incertezas no processo. L.M. resolve, por isso, introduzir algumas novidades neste rigoroso método de decisão. E decide não atirar a moeda, mas sim colocá-la a rolar sobre uma superfície horizontal.

Ao “lançar” a moeda, L.M. verifica que esta fica a rolar sobre a mesa, inclinada de um ângulo θ em relação à horizontal. A rotação da moeda é tal que o ponto de contacto com a mesa descreve uma trajetória circular de raio R (ver figura) e o ângulo θ se mantém constante.



1. Considere dois sistemas de eixos distintos: um sistema de eixos fixo na mesa ($\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$) e outro ($\{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3\}$) com origem no centro de massa da moeda e cujos eixos coincidem com os eixos de simetria da moeda. Este segundo sistema de eixos está solidário com a moeda e, por isso, roda conjuntamente com esta. Seja \hat{x}_3 o eixo fixo na moeda que é perpendicular ao plano desta. Seja \hat{z} o eixo do sistema fixo à mesa que é perpendicular a esta, i.e., o eixo que indica a direção da força gravítica. O ângulo entre \hat{z} e \hat{x}_3 é, portanto, θ , e é constante no tempo. Supondo que o atrito da moeda com a superfície da mesa é suficientemente grande para que esta role sem deslizar, mostre que o vetor

velocidade angular da moeda se pode escrever

$$\vec{\omega} = \Omega \hat{z} - \omega' \hat{x}_3$$

e determine a relação entre a velocidade de rotação do sistema de eixos fixo na moeda em torno de \hat{z} (Ω) e ω' .

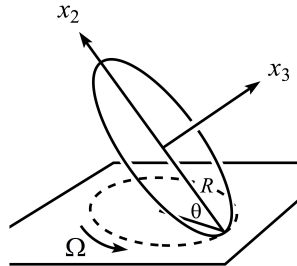
2. A expressão da alínea anterior recorre a versores de dois sistemas de eixos distintos. Re-escreva-a no sistema de eixos fixo na moeda, i.e., obtenha uma expressão para \hat{z} no sistema de eixos $\{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3\}$.
3. Determine a componente horizontal (perpendicular a \hat{z}) do momento angular da moeda em relação ao seu centro de massa.¹
4. Mostre que

$$\left| \frac{d\vec{L}}{dt} \right| = \frac{1}{4} m r \Omega^2 \sin \theta (2R - r \cos \theta) .$$

5. Qual é o momento resultante (em relação ao centro de massa da moeda) das forças que atuam sobre a moeda?
6. Determine a frequência do movimento circular do ponto de contacto com a mesa.
7. Mostre que este movimento circular só é possível se

$$R > \frac{5}{6} r \cos \theta .$$

Ao fim de algum tempo, L.M. verifica que o ângulo θ já não se mantém constante, visto haver dissipação de energia. A moeda deixa então de rolar e passa a oscilar enquanto o seu centro de massa cai em direção à mesa. Mas o processo de “queda” da moeda é lento. Isto significa que a inclinação da moeda se mantém aproximadamente constante durante intervalos de tempo razoáveis. Pode-se assim considerar o movimento de queda como uma sucessão de pequenos “saltos” no valor de θ em que, para cada valor de θ , se verifica que o centro de massa da moeda se mantém praticamente imóvel enquanto esta oscila. O movimento pode assim ser estudado considerando que θ é constante e introduzindo depois uma lei para a variação lenta de θ .



¹O teorema dos eixos perpendiculares diz que, para um objeto plano, o momento de inércia em torno de um eixo que passa por um dado ponto C do objeto e é perpendicular ao plano do objeto é igual à soma dos momentos de inércia em torno de dois eixos perpendiculares entre si que passem por C e estejam sobre o plano do objeto.

8. Qual é o raio da trajetória circular do ponto de contacto da moeda com a mesa?
 Repare que a moeda já não rola sobre a mesa...

9. Mostre que a velocidade angular da moeda nesta fase do seu movimento é

$$\vec{\omega} = \Omega \sin \theta \hat{x}_2.$$

10. Mostre que agora

$$\Omega = 2\sqrt{\frac{g}{r \sin \theta}}.$$

11. Mostre que, quando a moeda é vista de cima, o rosto de Buda aparenta rodar com velocidade angular

$$2(1 - \cos \theta) \sqrt{\frac{g}{r \sin \theta}}.$$

Constantes Físicas

e	$1,602176487 \times 10^{-19} \text{ C}$
N_A	$6,02214179 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
k_B	$1,3806504 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
ε_0	$8,854187817 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
c	299792458 m/s
G	$6,67428 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$
h	$6,62606896 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
\hbar	$1,054571628 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
σ	$5,670400 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \text{K}^{-4}$
Constante de Wien	$2,8977685 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$
a_0	$0,52917720859 \times 10^{-10} \text{ m}$
u	$1,660538782 \times 10^{-27} \text{ kg}$
u	$931,494028 \text{ MeV}/c^2$
m_e	$9,10938215 \times 10^{-31} \text{ kg}$
m_e	$510,998910 \text{ keV}/c^2$
m_e	$5,4857990943 \times 10^{-4} \text{ u}$
m_p	$938,272013 \text{ MeV}/c^2$
m_n	$939,565346 \text{ MeV}/c^2$
m_α	$3727,379109 \text{ MeV}/c^2$
M_{Terra}	$5,97219 \times 10^{24} \text{ kg}$
M_\odot	$1,98855 \times 10^{30} \text{ kg}$
$M_\odot \frac{G}{c^2}$	$1,48 \text{ km}$
1 pc	$3,2616 \text{ anos-luz}$
1 pc	$3,086 \times 10^{16} \text{ m}$
ρ_{Ag}	10490 Kg/m^3
M_{Ag}	$107,86 \text{ g/mol}$
ρ_{Ag}	$15,87 \times 10^{-9} \Omega \cdot \text{m}$