Sociedade Portuguesa de Física

Olimpíadas de Física 2013

Selecção para as provas internacionais

Prova Teórica

11/Maio/2013

Olimpíadas Internacionais de Física 2013

Selecção para as provas internacionais

Prova Teórica

Duração da prova: 4h

I Vários tópicos

1. Os foguetões alimentados a hidrogénio e oxigénio líquidos obtêm energia da reacção $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$, que lhes fornece 13,3 MJ/kg de combustível. Esta energia surge na forma de energia térmica do produto de combustão (vapor).

   (a) A eficiência da conversão da energia libertada na combustão em energia cinética dos gases de exaustão não é 100%. Porquê? (Define-se a eficiência deste processo como a razão entre a energia cinética dos gases de exaustão e a energia libertada na combustão.)

   (b) Assuma que o gás quente parte do repouso na câmara de combustão e se expande adiabaticamente até atingir a pressão atmosférica à saída do tubo de escape. Mostre que a eficiência do foguetão ideal é a de uma máquina de Carnot (assuma que o vapor de água é um gás perfeito).

   (c) Estime a eficiência de um foguetão ideal em que a pressão na câmara de combustão é 7 MPa.

   (d) Estime a velocidade de exaustão deste gás.

2. De acordo com uma conjectura dos pitagóricos, haveria um segundo planeta, idêntico à Terra, que descreveria exactamente a mesma órbita que a Terra mas estaria sempre escondido atrás do Sol, em oposição perfeita à Terra.

   (a) Supondo que este planeta fantasma tinha a mesma massa que a Terra, de que modo seria a duração do ano terrestre afectada?

   (b) Seria possível este planeta permanecer indefinidamente escondido atrás do Sol?

3. Um dos métodos propostos para destruir os icebergs que escapam para as regiões temperadas do globo consiste em cobri-los com uma camada espessa de fuligem lançada por um avião. O iceberg escurecido passaria a absorver toda a radiação solar nele incidente, derretendo rapidamente. Estime a eficácia deste método. Considere um iceberg de $1,0 \times 10^5$ toneladas. O calor latente de fusão da água é 333 kJ/kg e a constante solar é 1360 W/m^2.

4. Considere que uma nuvem é formada por minúsculas gotículas de água suspensas no ar. Estas gotículas estão em repouso e podem-se considerar uniformemente distribuídas na nuvem. Imagine agora que uma gota de chuva começa a cair através da nuvem. Qual é a sua aceleração? (Suponha que quando a gota atinge uma gotícula, a água da gotícula é adicionada à gota. Suponha também que a gota permanece esférica durante toda a queda através da nuvem.)

5. Um feixe de electrões, acelerado a partir do repouso por uma tensão V, é injectado numa região de campo magnético uniforme, $\vec{B}$. Os electrões movem-se num plano perpendicular a $\vec{B}$, descrevendo circunferências de raio R.

   Determine, em função dos parâmetros dados, a razão entre a carga e a massa dos electrões, e/m.

II Electromagnetismo

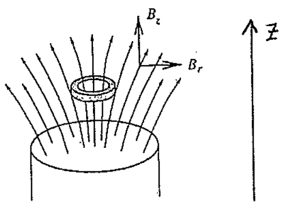
1. Num plasma, constituído por iões positivos de carga $+q$ e electrões de carga $-q$, o potencial eléctrico à distância r de um ião $\mathcal{O}$, considerado como origem, é dado pela expressão

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\,\mathrm{e}^{-\mu r}\,,$$

   sendo μ um parâmetro.

   Determine a carga eléctrica $Q(r)$ contida num volume esférico de plasma, de raio r e centro no ponto $\mathcal{O}$. Analise o significado físico dos casos limite: $r \longrightarrow 0$ e $r \longrightarrow \infty$. Obtenha a expressão da distribuição radial de carga em torno do ião $\mathcal{O}$.

2. Um anel de resistência desprezável (supercondutor) é colocado por de cima de um magnete cilíndrico vertical, de modo que o cilindro e o anel tenham o mesmo eixo. O anel tem massa m, raio r_0 e indutância $\mathcal{L}$.
   O campo magnético criado pelo magnete tem simetria cilíndrica, podendo descrever-se através das suas componentes vertical, B_z, e radial, B_r, na seguinte forma:



$$B_z = B_0(1 - \alpha z) \quad \text{e} \quad B_r = B_0 \beta r\,,$$

   onde B_0, α e β são constantes; z e r são as coordenadas cilíndricas segundo o eixo dos zz e segundo a direcção radial, respectivamente.

   As coordenadas do centro do anel no instante $t = 0$ são $z = 0$ e $r = 0$.

   Quando o anel é largado a corrente que o percorre é nula e este mantém o seu eixo vertical, à medida que vai caindo.

   Nota: a queda de tensão nos extremos de uma indutância pura é $\mathcal{L}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$

   (a) Determine em função de $z(t)$ e dos parâmetros dados a expressão da corrente induzida no anel e marque na figura o respectivo sentido.

   (b) Calcule a força magnética a que o anel fica sujeito e verifique que ela se pode escrever na forma $\vec{F}(z) = -kz\,\hat{\mathrm{e}}_z$. Qual a expressão da constante k?

   (c) Caracterize o movimento do anel, determinando a expressão de $z(t)$ e obtenha a expressão da corrente que o percorre $I(t)$.

III Campo magnético gravitacional

Na sua Lei da Atracção Universal, Isaac Newton propôs a variação da atracção gravítica entre duas massas com o inverso do quadrado da distância entre elas:

$$\vec{F} = -Gm_1m_2\frac{1}{r^2}\hat{r}\,.$$

Para Newton o tempo era absoluto, o que se traduz por uma interacção gravítica instantânea, isto é, a força sobre uma das massas altera-se instantaneamente quando a outra se desloca. É claro que uma lei deste tipo não está de acordo com a Teoria da Relatividade Restrita...

Na teoria electromagnética, a força electrostática (força de Coulomb) é também uma força que varia com o inverso do quadrado da distância entre as duas cargas. Mas neste caso é possível "corrigir" a força, generalizando-a de modo a incluir as forças associadas a campos magnéticos. As componentes eléctrica e magnética da força não são separadamente invariantes de Lorentz, mas a 'força electromagnética conjunta" é, não dependendo portanto de um tempo absoluto. Matematicamente, o potencial electrostático surge como a componente temporal de um tetra-vector potencial que gera os campos eléctrico e magnético. As outras três componentes deste tetra-vector são as componentes de um potencial vector associado ao campo magnético.

A semelhança entre as leis da gravitação e da electrostática sugere que se resolva o problema da não-invariância da lei de Newton através da introdução de componentes adicionais à força gravítica. O verdadeiro potencial gravítico seria assim também um tetra-vector... Neste problema vamos estudar um pulsar binário para mostrar que não é esta a solução.

Um pulsar binário é um sistema de duas estrelas de neutrões em órbita, sendo uma delas um pulsar que serve para obter um mecanismo de medição do tempo com elevada precisão. O sistema radia energia sob a forma de perturbações do campo gravítico que se propagam com a velocidade da luz no vazio (ondas gravitacionais). Esta radiação significa que o sistema binário está a perder energia potencial gravitacional e, portanto, que a órbita está a decair.

III.1 Radiação dipolar gravitacional

Vamos começar por calcular a radiação emitida pelo pulsar binário recorrendo a uma analogia com a teoria electromagnética, o que corresponde a admitir a existência de um vector potencial gravítico. Na teoria electromagnética clássica, uma carga q que se move com aceleração a emite radiação (é aliás esta a razão que levou Niels Bohr a postular as regras de quantização das órbitas atómicas...). A quantidade de energia emitida por unidade de tempo em todas as direcções (a potência P) é dada, para cargas que se movem a velocidades não-relativistas, pela fórmula de Larmor:

$$P = \frac{q^2a^2}{6\pi\epsilon_0c^3}\,.$$

A massa do pulsar é $1,42M_\odot$, a massa da outra estrela de neutrões é $1,40M_\odot$, o semi-eixo maior da órbita do pulsar mede $3,08$ segundos-luz, o seu período é $27906,98$ s, a sua distância à Terra é 5 kpc e a taxa de variação do período orbital é $\frac{dT}{dt} = -2,4\times10^{-12}\ \mathrm{s\cdot s^{-1}}$.

1. Atendendo às semelhanças entre as leis de Coulomb e da Atracção Universal, qual seria o análogo da fórmula de Larmor para a radiação "gravitacional" de uma massa acelerada?

2. Considere que o pulsar binário pode ser aproximado por duas massas pontuais M, iguais, em órbitas circulares em torno de um centro comum. Determine o período da órbita em função de M e da distância entre as duas massas, ℓ.

3. Determine a energia total do sistema em função de M e ℓ.

4. Obtenha uma expressão para a energia radiada pelo pulsar binário durante um período de rotação em função de M, ℓ e do período orbital T.

5. Calcule a taxa de perda de energia por unidade de energia

$$\eta = \frac{dE/dt}{E} \, .$$

6. Calcule a taxa de variação do período orbital

$$\frac{dT}{dt}$$

e comente.

III.2 Radiação quadrupolar gravitacional

1. A Teoria da Relatividade Generalizada descreve o campo gravítico através de um objecto matemático bastante complexo, um tensor de segunda ordem. Nesta teoria a potência gravitacional radiada pelo pulsar depende do tensor de inércia I do sistema (radiação quadrupolar), mais concretamente

$$P \propto \left(\frac{d^3 I}{dt^3} \right)^2 \, .$$

Sem considerar informação adicional, e recorrendo apenas a análise dimensional, é possível obter uma estimativa da ordem de grandeza da potência radiada (a menos de uma constante adimensional que pode supor ser da ordem da unidade). Mostre que o resultado obtido é várias ordens de grandeza inferior ao obtido na alínea 1. da secção anterior.

2. Tendo em conta a taxa de variação do período orbital observada experimentalmente, qual seria o fluxo de energia na Terra se esta variação se devesse apenas a radiação gravitacional?

Constantes Físicas

e	$1{,}602176487\times10^{-19}$ C
N_A	$6{,}02214179\times10^{23}$ mol^{-1}
k_B	$1{,}3806504\times10^{-23}$ J·K^{-1}
ε_0	$8{,}854187817\times10^{-12}$ F·m^{-1}
c	299792458 m/s
G	$6{,}67428\times10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2}
h	$6{,}62606896\times10^{-34}$ J·s
$\hbar$	$1{,}054571628\times10^{-34}$ J·s
σ	$5{,}670400\times10^{-8}$ W·m^{-2}K^{-4}
Constante de Wien	$2{,}8977685\times10^{-3}$ m·K
a_0	$0{,}52917720859\times10^{-10}$ m
u	$1{,}660538782\times10^{-27}$ kg
u	931,494028 MeV/c^2
m_e	$9{,}10938215\times10^{-31}$ kg
m_e	510,998910 keV/c^2
m_e	$5{,}4857990943\times10^{-4}$ u
m_p	938,272013 MeV/c^2
m_n	939,565346 MeV/c^2
m_α	3727,379109 MeV/c^2
M_{Terra}	$5{,}97219\times10^{24}$ kg
$M_\odot$	$1{,}98855\times10^{30}$ kg
$M_\odot\frac{G}{c^2}$	1,48 km
1 pc	3,2616 anos-luz
1 pc	$3{,}086\times10^{16}$ m