

Introdução comum aos Problemas 1 e 2¹

Para explicar a conservação da energia e do momento linear na desintegração β , o físico austríaco Wolfgang Pauli previu em 1930 a existência de uma partícula de massa nula, ou praticamente nula, sem carga eléctrica e com uma interacção muito débil com a matéria, sendo, por isso, muito difícil de detectar. Posteriormente, Enrico Fermi deu-lhe o nome de *neutrino*. Em 1956, Clyde Cowan e Frederick Reines verificaram experimentalmente a sua existência. Hoje em dia os neutrinos são entendidos como partículas fundamentais para se compreender o Universo na sua escala mais pequena, e têm um papel de relevo na investigação de alguns dos problemas candentes da Astrofísica e da Cosmologia.

Os neutrinos, pelo facto de não terem carga, não são desviados pelos campos electromagnéticos e só são perturbados pela matéria que cruzam no seu caminho. Com efeito, enormes quantidades de neutrinos provenientes do cosmos, e em particular do Sol, atravessam a Terra a cada segundo. No entanto, só alguns deles interagem com algum núcleo, dando como resultado a produção de outras partículas: electrões, muões e tauões.

Tal como adiante se explica, estas partículas, se forem suficientemente energéticas, provocam a emissão de uma luz azulada conhecida como *radiação de Cherenkov* (luz característica nas piscinas de armazenamento de material irradiado das centrais nucleares). Se o meio em que se propagam for transparente, como água ou gelo de grande pureza, esta luz pode ser detectada, sendo por isso um método indirecto para a detecção de neutrinos. Este é o fundamento de uma boa parte dos observatórios de neutrinos existentes no mundo. Como a probabilidade de algum neutrino ser "caçado" é tanto maior quanto maior for o tamanho e a massa dos detectores, os "observatórios" de neutrinos são instalações gigantescas e a sua construção constitui um imenso desafio tecnológico.

Nestes exercícios, de forma muito simplificada, faz-se alusão ao maior deles, o IceCube Neutrino Observatory, situado na Antártida, na base Amundsen-Scott, próxima do Pólo Sul geográfico. Neste laboratório presta-se especial atenção aos muões gerados pelos neutrinos dado que, mediante um complexo sistema de aquisição de dados, se pode determinar a direcção de propagação e a energia dos neutrinos que os produziram.

Basicamente, o IceCube é uma rede tridimensional de detectores, chamados DOM (Digital Optical Module). Têm forma esférica e alojam-se distribuídos por 86 poços escavados no gelo austral. Cada DOM alberga um fotomultiplicador e os equipamentos electrónicos a ele associados. Estes são colocados formando cadeias, tal como apresentado na figura 1, e estão situados a uma profundidade entre 1.450 m e 2.450 m, onde o gelo é extraordinariamente puro e transparente.

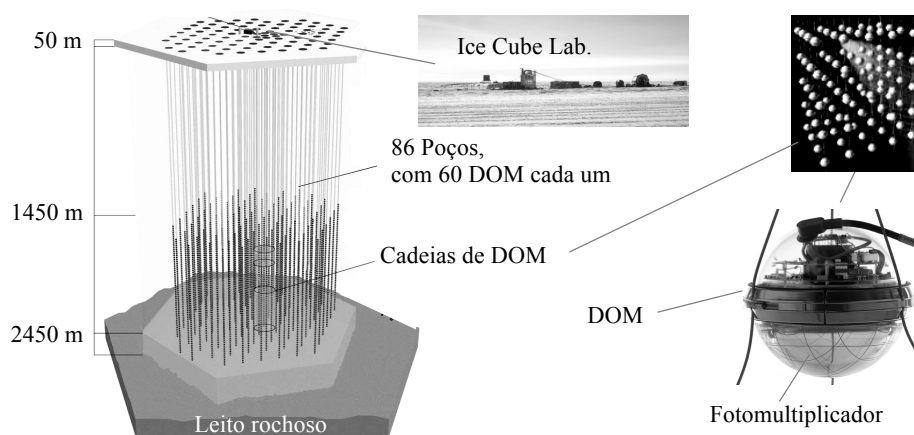


Fig. 1

¹ Estes exercícios são dedicados à Dr^a. Maria Luisa Sarsa, a sua inspiradora, que faz parte da equipa investigadora do Laboratório Subterrâneo de Canfranc (Huesca, Espanha). A partir da Antártida, os exercícios foram supervisionados pelo Dr. Carlos Pobes, investigador espanhol associado à Universidade de Wisconsin – Madison e *Winter Over* do ensaio IceCube.

Problema 1. À caça do neutrino.

(7 pontos)

a) A construção do IceCube.

A escavação dos poços foi concluída em Dezembro de 2010, após quase cinco anos de trabalho. Os primeiros 50 m de profundidade de cada poço são de neve compactada e o resto, até 2.450 m, é gelo. A neve é relativamente fácil de derreter, mas quando se chega ao gelo aumenta significativamente o grau de dificuldade. Para o conseguir utilizou-se água a pressão elevada e quase à temperatura de ebulição. A água que se obteve ao derreter o gelo foi posta em recirculação à superfície onde se aquecia e se utilizava novamente para continuar a perfurar. O tamanho de cada DOM é aproximadamente o de uma bola de basquetebol, com uma grande resistência mecânica para suportar as duríssimas condições a que está submetido.

- a1) Cada poço tem uma profundidade média $H = 2,40 \times 10^3$ m e um raio $r = 0,30$ m, e a temperatura média do gelo a fundir é $T_h = -30^\circ\text{C}$. Escreva a expressão da energia mínima que é necessário investir para derreter o gelo de cada poço, E_{\min} , e calcule o seu valor.

b) O Sol, fonte de energia e emissor de neutrinos.

O Sol produz energia mediante processos de fusão de protões (^1H) que dão lugar à formação de núcleos de ^4He e que têm lugar no seu interior a uma pressão e temperatura elevadíssimas. O principal destes processos de fusão é o chamado *ciclo protão-protão* (ciclo pp), que se representa de forma esquemática na figura 2

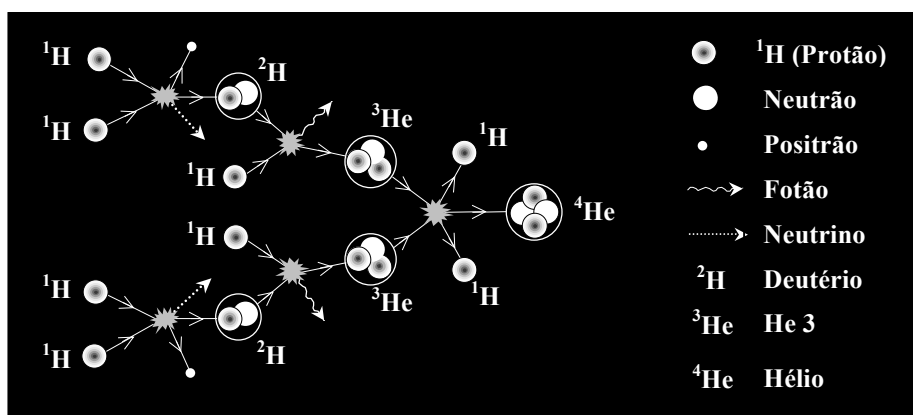


Fig. 2

Entre os produtos iniciais e finais do processo, há uma perda de massa Δm que dá lugar a uma libertação de energia ΔE . Esta energia é levada maioritariamente pelos fótons produzidos, que acabam por sair como radiação pela superfície solar e alcançam a Terra. Para simplificar o problema, não será tida em conta a energia dos neutrinos, que é uma aproximação razoável para os neutrinos de baixa energia emitidos nos ciclos pp, nem a massa (energia) dos positrões gerados.

- b1) Escreva a expressão de Δm e calcule a energia libertada em cada ciclo pp, ΔE .

Uma forma indirecta de se conhecer o número de neutrinos que o Sol emite baseia-se na medição da *constante solar*, u_s . Esta constante é a quantidade de energia recebida em forma de radiação solar, por unidade de tempo e de superfície, medida na parte externa da atmosfera terrestre e num plano perpendicular aos raios do Sol. O seu valor é $u_s = 1,366 \text{ kW/m}^2$

- b2) Admitindo que a energia emitida pelo Sol provém exclusivamente dos ciclos pp, calcule o número de neutrinos que o Sol emite em cada segundo, N_ν .

c) Neutrinos e muões.

Os neutrinos, que provêm do Sol na sua imensa maioria, atravessam continuamente a Terra e não podem ser directamente detectados. Para a sua medição, foram concebidos detectores específicos baseados em

processos radioquímicos (Homestake e Gallex) ou no efeito Cherenkov em água (Sudbury, Kamiokande, etc.) que são também eficazes para a detecção de neutrinos de origem cósmica. O gigantesco IceCube pertence ao segundo tipo e os neutrinos são indirectamente detectados quando algum deles interage com um átomo de oxigénio do gelo. Estas interacções dão lugar a outras partículas e, de entre elas, os muões são as que mais facilmente se detectam. Os muões, que são semelhantes ao electrão mas mais pesados, são partículas carregadas e instáveis. A sua vida média², medida no sistema de referência em que o muão está em repouso, é $\tau_0 = 2,2 \mu\text{s}$.

- c1) Escreva a expressão para a velocidade de um muão, v_μ , em função da sua massa m_μ , da sua energia E_μ e da velocidade da luz no vácuo, c . Calcule o seu valor quando a energia do muão é $E_\mu = 1,5 \times 10^3 \text{ MeV}$.

Em consequência das interacções dos raios cósmicos com núcleos de átomos da alta atmosfera, também se originam aí muões, que depois chegam ao IceCube. Estes muões devem ser tidos em conta para serem "descontados", dado que não foram originados por neutrinos.

- c2) Calcule a distância d_μ , medida por um observador na Terra, que um muão originado na alta atmosfera pode percorrer na atmosfera antes de se desintegrar, supondo que ele se move à velocidade calculada na secção anterior (c1).

Constantes e Dados físicos	
Calor específico do gelo	$C_h = 2,11 \times 10^3 \text{ J / (kg K)}$
Calor latente de fusão do gelo	$L_h = 3,34 \times 10^5 \text{ J / kg}$
Densidade do gelo	$\rho_h = 9,17 \times 10^2 \text{ kg / m}^3$
Distância Sol-Terra	$R_{\text{ST}} = 1,49 \times 10^{11} \text{ m}$
Massa do protão (^1H)	$m_{^1\text{H}} = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Massa do núcleo de Hélio (^4He)	$m_{^4\text{He}} = 6,64 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Massa do electrão	$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Massa do muão	$m_\mu = 207 m_e$
Velocidade da luz no vácuo	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m / s}$
$1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}$	

Ajuda
<p>Energia mecânica relativista de uma partícula de massa m que se move à velocidade v:</p> $E = \gamma m c^2, \text{ onde } \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$
<p>Dilatação do tempo:</p> $\tau = \gamma \tau_0$

² A vida média é a média de vida de uma partícula antes de se desintegrar.

P1. Tabela de respostas

Questão	Resultados analíticos	Resultados numéricos	Pontos
a1	$E_{\min} =$	$E_{\min} =$	0,7+0,3
b1	$\Delta m =$	$\Delta E =$	1 + 0,5
b2		$N_{\nu} =$	2
c1	$v_{\mu} =$	$v_{\mu} =$	1+0,5
c2		$d_{\mu} =$	1

Problema 2. A detecção indirecta dos neutrinos no IceCube.

(7 pontos)

a) A radiação de Cherenkov.

Nas poucas interacções dos neutrinos com os núcleos do gelo antártico, originam-se *muões* que são partículas carregadas relativistas, isto é, que viajam com uma velocidade próxima da velocidade da luz no vácuo, c . Pelo facto de terem carga eléctrica, os muões excitam os átomos da matéria (gelo, neste caso) que encontram na sua passagem. Os átomos excitados voltam quase imediatamente ao seu estado fundamental, emitindo luz (radiação de Cherenkov) que se propaga no gelo com uma velocidade inferior a c . O índice de refração do gelo, n_h , encontra-se na Tabela de Constantes Físicas. A região de emissão (mas não os átomos) desloca-se com o muão, a uma velocidade superior à da luz no gelo. Com base no princípio de Huygens-Fresnel, a frente de onda luminosa resultante é uma superfície cónica, tal como representado na figura 3.

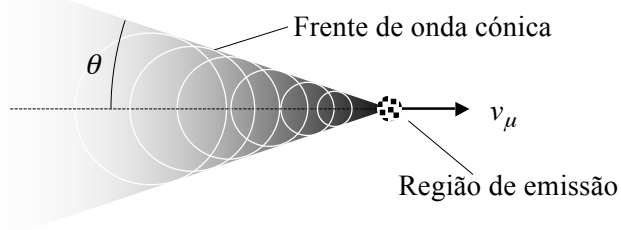


Fig. 3

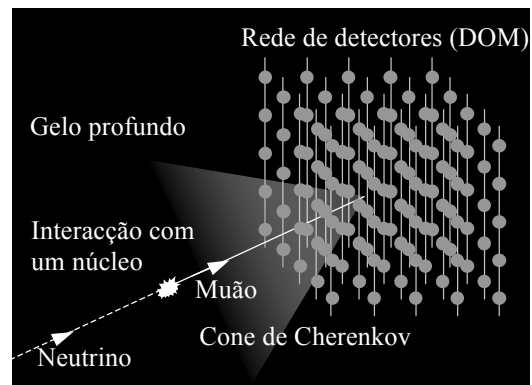


Fig. 4

a1) Escreva a expressão e calcule o semiângulo θ da frente de onda cónica em função de v_μ e de n_h .

b) A detecção da luz de Cherenkov.

A detecção da luz de Cherenkov no IceCube, que constitui a forma indirecta de detecção dos neutrinos, é efectuada mediante os 5.160 DOM alojados no gelo profundo (figura 4). Em cada DOM existe um *fotomultiplicador* que transforma os fótons de luz de Cherenkov num sinal eléctrico que, uma vez digitalizado, é enviado para o centro de controlo para ser registado e analisado.

Embora os fotomultiplicadores utilizados nos DOM tenham uma geometria diferente, são basicamente análogos ao que está representado na figura 5. Um fotomultiplicador é composto por um *fotocátodo* que, por efeito fotoeléctrico, emite electrões (*fotoelectrões*) quando incidem sobre o mesmo fótons de energia igual ou superior à *função trabalho* do material com o qual está construído. Um campo eléctrico acelera estes electrões e dirige-os para um ânodo, que nestes dispositivos tem o nome de *dínodo*. A energia dos electrões incidentes provoca a emissão de um número maior de *electrões secundários* que são dirigidos para um segundo dínodo.

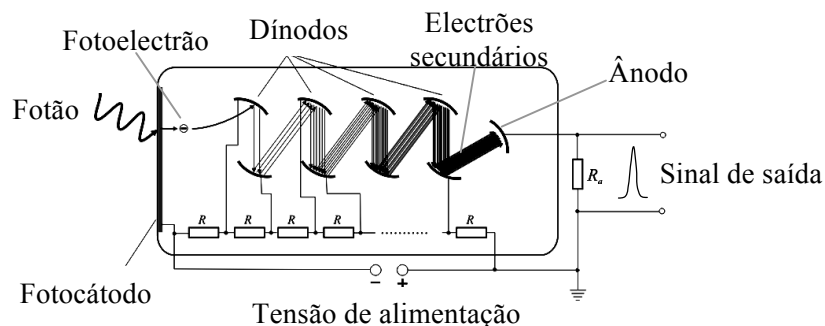


Fig. 5

O número de dínodos, a sua disposição e as diferenças de potencial existentes entre eles, variam com o modelo de fotomultiplicador. No fim, após este processo em cascata, onde o número de fotoelectrões é

multiplicado pelas emissões secundárias, o sinal de saída que é obtido no último dínodo (que é o ânodo), é proporcional ao número de fotões incidentes no fotocátodo.

b1) Tendo em conta a equação de Einstein do efeito fotoelétrico, determine a função trabalho do material do fotocátodo, Φ_{max} , para que um fotão de luz de Cherenkov, com um comprimento de onda no vácuo $\lambda = 420 \text{ nm}$, seja capaz de retirar um electrão.

b2) Se o número de fotões de comprimento de onda λ que incidem por unidade de tempo no fotocátodo for N_f , determine a energia por unidade de tempo (potência, P_f) que estes fotões depositam no fotocátodo.

As principais características técnicas dos fotomultiplicadores são: o número de dínodos, n , a *eficiência quântica* (Quantum Efficiency), a *sensibilidade radiante* e o ganho.

A eficiência quântica, QE , é a percentagem do número de electrões que saem do fotocátodo por segundo, N_e , relativamente ao número de fotões que incidem por segundo, N_f .

$$QE = \frac{N_e}{N_f} \times 100$$

A sensibilidade radiante, S , para um determinado comprimento de onda da luz incidente, é o quociente entre a intensidade de corrente que sai do fotocátodo, I_e , e a potência da radiação de fotões que incidem no fotocátodo, P_f .

$$S = \frac{I_e}{P_f}$$

O ganho, G , é definido como o quociente entre a intensidade de corrente que chega ao ânodo, I_a , e a que sai do fotocátodo, I_e .

$$G = \frac{I_a}{I_e}$$

b3) Determine a expressão do ganho G do fotomultiplicador em função do número de dínodos, n . Considere que em cada dínodo, em média, se produzem δ electrões secundários por cada electrão incidente. Calcule δ para um fotomultiplicador de 10 dínodos com um ganho $G = 1,0 \times 10^9$.

b4) Obtenha a expressão que relaciona a eficiência quântica, QE , com a sensibilidade radiante, S .

b5) Os fotomultiplicadores utilizados no IceCube têm um ganho $G = 1,0 \times 10^9$ e uma eficiência quântica $QE = 25$. Se incidirem fotões Cherenkov com um comprimento de onda $\lambda = 420 \text{ nm}$, calcule a relação entre a intensidade de corrente I_a que sai do ânodo e a potência P_f da radiação incidente.

Constantes físicas	
Velocidade da luz no vácuo	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m/s}$
Índice de refração do gelo	$n_h = 1,32$
Constante de Planck	$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Carga elementar	$e = 1,60 \times 10^{19} \text{ C}$

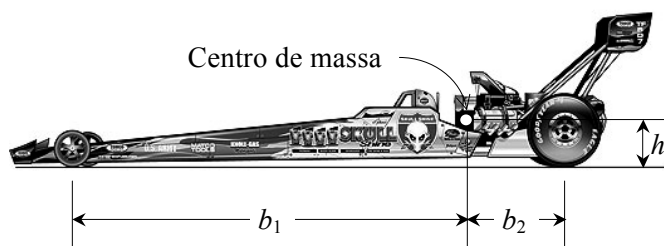
P 2. Tabela de respostas

Questão	Resultados analíticos	Resultados numéricos	Pontos
a1	$\theta =$	$\theta =$	0,7+0,3
b1		$\Phi =$	1
b2	$P_f =$		1,5
b3	$G =$	$\delta =$	0,7+0,3
b4	$QE =$		1,5
b5		$\frac{I_a}{P_f} =$	1

Problema 3. Dragster ¹.

(8 pontos)

Os *dragsters* são carros alongados que competem em corridas de aceleração em percursos curtos e em linha recta. Nesses percursos, estes carros atingem altas velocidades em poucos segundos. A figura mostra um destes “monstros”, estando a posição do centro de massa assinalada com um círculo branco. A figura mostra também alguns parâmetros geométricos que serão necessários na resolução do problema.



Os elementos aerodinâmicos (ailerons) existentes tanto na parte anterior como na posterior do dragster, embora desempenhem um papel muito importante, não vão ser tidos em conta. Considera-se ainda que, em todo o processo que aqui se estuda, as rodas motrizes rodam sempre sem deslizar.

A força de atrito entre a pista e as rodas motrizes (que são as posteriores) é a que faz avançar o carro. Logicamente, para que a aceleração seja máxima, interessa que esta força de atrito também o seja.

- Faça um desenho esquemático do dragster, indicando as forças externas que actuam sobre ele durante o processo de aceleração.
- Ignorando todas as forças dissipativas excepto a força de atrito com a pista, e tomando como coeficiente de atrito $\mu = 0,90$ e como valor da aceleração da gravidade $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, obtenha a expressão da aceleração máxima do veículo, a_{max} , e calcule o seu valor.

A distribuição dos pesos, isto é, a relação entre b_1 , b_2 e h , é determinante para se conseguir a máxima aceleração.

- Determine a relação que deve existir entre b_2 e h para que a aceleração seja máxima sem que o dragster faça um “cavalinho”, isto é, para que mantenha as quatro rodas no chão durante todo o percurso.
- Se o comprimento da pista for $L = 400 \text{ m}$, determine as expressões da velocidade no fim do percurso, V_f , e do tempo decorrido no percurso, T_f , e calcule os seus valores. Considere que o carro se move sempre com a aceleração máxima.

Uma vez percorrida a pista de aceleração, tendo já atingido a velocidade máxima, V_f , os dragsters abrem um pára-quedas² para travarem. A força de resistência que o pára-quedas exerce é:

$$F_R = \frac{1}{2} \rho S C_D v^2$$

em que v é a velocidade do dragster, $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$ é a densidade do ar, $S = 3,0 \text{ m}^2$ é a superfície que o pára-quedas apresenta ao fluxo de ar e $C_D = 1,2$ é um coeficiente, chamado *de forma*, que suporemos independente da velocidade.

- Considere que a massa do dragster é $M = 1,5 \times 10^3 \text{ kg}$ e despreze qualquer outra força de atrito. Determine o tempo T_p que decorre desde que o piloto abre o pára-quedas até que a velocidade do dragster se reduza a 50%, isto é, a um valor $V_p = V_f / 2$.

Ajuda: $\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}$

¹ “Classical Mechanis. A Modern Perspective”, V. Barger y M. Olsson. McGraw-Hill. 1994.

² Costumam ser dois pára-quedas em paralelo mas, para simplificarmos, suporemos que é apenas um.

P3. Tabela de respostas

Questão	Resultados analíticos	Resultados numéricos	Pontos
a			2,0
b	$a_{max} =$	$a_{max} =$	0,7+0,3
c	$\frac{b_2}{h} =$		1,5
d	$V_f =$ $T_f =$	$v_f =$ $T_f =$	1,75 + 0,75
e	$T_p =$	$T_p =$	0,75+0,25

Problema 4. A bobina de indução ou bobina de Ruhmkorff.

A bobina de indução construída por Ruhmkorff em 1851, antes do invento dos transformadores propriamente ditos, é um dispositivo destinado a produzir, num circuito secundário, uma força electromotriz (fem) induzida muito superior à fem aplicada num circuito primário. Na figura 1 apresenta-se uma fotografia de uma bobina de Ruhmkorff.

As bobinas de indução foram muito utilizadas nos primórdios dos raios X e da “telefonía sem fios”. Foram e ainda são usadas nos motores de explosão para provocarem a faísca nas velas.

Tal como apresentado no esquema da figura 2, a bobina é essencialmente composta por um enrolamento *primário*, formado por várias espiras de fio grosso de cobre, isoladas entre si e enroladas sobre um núcleo de ferro macio. Os seus terminais são ligados a um gerador de corrente contínua de tensão V_p , intercalando um interruptor que abre e fecha continuamente o circuito de forma automática.

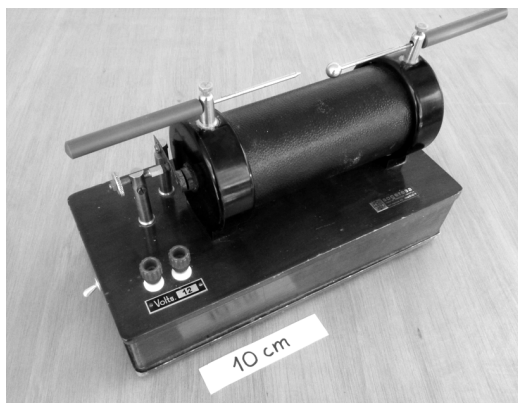


Fig. 1

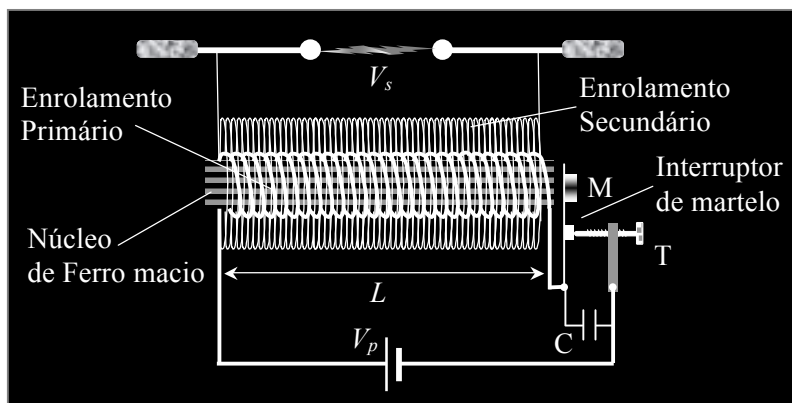


Fig. 2

Outro enrolamento, chamado *secundário*, é colocado sobre o primário e é composto por um grande número de espiras de fio fino, muito bem isoladas electricamente entre si e em relação ao primário, cujas pontas constituem os terminais da bobina, entre os quais haverá uma voltagem $V_s \gg V_p$.

No esquema da figura 2, a bobina do primário tem um comprimento L e é composta por N_p espiras circulares de diâmetro D_p . Estas espiras são de fio de cobre, de resistividade ρ e de secção circular com diâmetro d_p . Considerando que o circuito primário está fechado:

- Obtenha a expressão da intensidade de corrente contínua que circularia pelo primário, I_0 , se o mesmo estivesse constantemente ligado à bateria de fem V_p .
- Se a corrente que circula pelo primário for I_0 , e desprezando os efeitos das extremidades do enrolamento, isto é, considerando o primário como um solenóide longo, obtenha a expressão do campo magnético dentro do solenóide, B_0 . Ignore a presença do núcleo de ferro.

Considere, de agora em diante, que no interior do primário há um núcleo de ferro macio formado por um molho de arames isolados entre si para se reduzirem as perdas provocadas por correntes de Foucault. A sua função é aumentar a intensidade do campo magnético B_0 que o primário sem núcleo criaria até um valor $B = \mu_r B_0$. A relação entre as permeabilidades magnéticas relativa, μ_r , e absoluta, μ , do material do núcleo é $\mu_r = \mu / \mu_0$.

Na figura 2 há também um interruptor de *martelo*. O seu funcionamento é simples: quando a corrente passa pelo primário, a armadura M, que está montada sobre uma lâmina flexível, é atraída pelo núcleo e separa-se do parafuso T, pelo que o circuito primário se abre e a corrente tende a anular-se. Nesse momento, cessa a atracção

porque o núcleo se desmagnetiza (é de ferro macio) e M volta à posição inicial em que o contacto do parafuso T fecha novamente o circuito.

O condensador C, que não será tido em conta no desenvolvimento deste exercício, serve para evitar (em parte) as faíscas que se formam entre os contactos nas interrupções periódicas.

Como o interruptor de martelo abre e fecha periodicamente o circuito, a corrente do primário é variável com o tempo, $I_p(t)$, e fá-lo periodicamente com uma frequência $f = 1/T$.

A dependência com o tempo de I_p é difícil de descrever analiticamente. Por uma questão de simplicidade, vamos admitir que varia com o tempo como se mostra na figura 3: em cada período T , a corrente cresce linearmente desde 0 até I_0 no intervalo $0 < t < 4T/5$ e diminui desde I_0 até 0 no intervalo $4T/5 < t < T$. Por conseguinte, o campo magnético criado irá também variar com o tempo, $B(t)$.

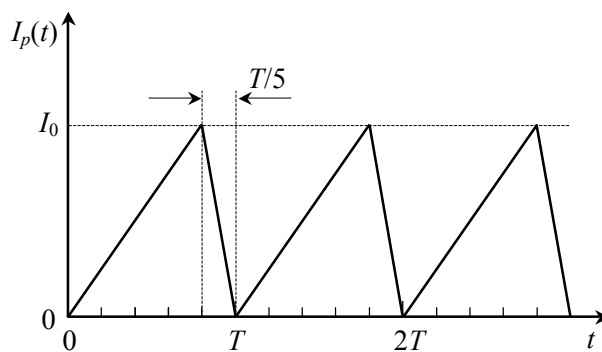
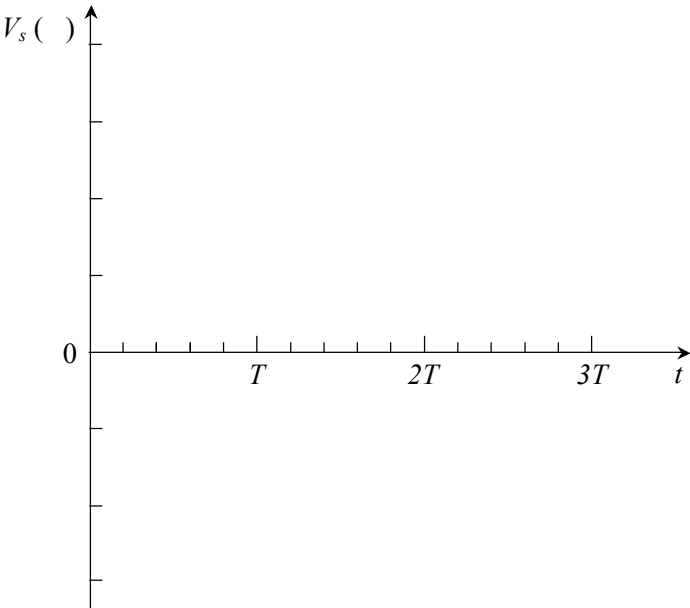


Fig. 3

- Determine as expressões da fem induzida no circuito secundário, $V_{s,1}$ e $V_{s,2}$, nos intervalos de tempo $0 < t < 4T/5$ e $4T/5 < t < T$, respectivamente.
- Com os valores numéricos da Tabela de dados, calcule os valores de $V_{s,1}$ e $V_{s,2}$.
- Represente graficamente a fem induzida no secundário, V_s , em função do tempo.

Tabela de dados	
Fem da bateria	$V_p = 12,0 \text{ V}$
Comprimento da bobina	$L = 15,0 \text{ cm}$
Diâmetro das espiras do primário	$D_p = 2,00 \text{ cm}$
Diâmetro do fio do primário	$d_p = 0,600 \text{ mm}$
Resistividade do Cobre	$\rho = 1,70 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$
Frequência do interruptor	$f = 1/T = 100 \text{ Hz}$
Permeabilidade magnética do vácuo	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$
Permeabilidade magnética relativa do núcleo	$\mu_r = 300$
Número de espiras do secundário	$N_s = 25000$

P4. Tabela de respostas

Questões	Resultados analíticos	Resultados numéricos	Pontos
a	$I_0 =$		1
b	$B_0 =$		1,5
c	$V_{s,1} =$ $V_{s,2} =$		4
d		$V_{s,1} =$ $V_{s,2} =$	0,5
e			1