



SOCIEDADE PORTUGUESA DE FÍSICA

## **Olimpíadas de Física 2011**

Seleccção para as provas internacionais

Prova Teórica

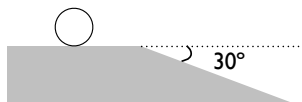
21/Maio/2011

## Prova Teórica

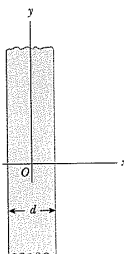
Duração da prova: 4h

### I Vários tópicos

1. Duas esferas, X e Y, de volumes diferentes, estão mergulhadas no fundo de uma tina que contém dois líquidos imiscíveis, A e B. A densidade da esfera X é idêntica à do líquido A e superior à da esfera Y. A densidade do líquido A é menor que a do líquido B. Num certo instante as duas esferas são largadas, simultaneamente, do fundo da tina. Qual delas chega primeiro à superfície?
2. Um porco desce uma rampa da sua pocilga que possui uma inclinação de  $35^\circ$ . A descida demora duas vezes mais quando a rampa está limpa do que quando está coberta de lama muito escorregadia. Qual é o coeficiente de atrito entre o porco e o material da rampa?
3. Um cilindro maciço e uniforme de raio  $R = 15$  cm rola sobre um plano horizontal sem deslizar e com velocidade constante. Ao fim de algum tempo o cilindro passa para um plano inclinado que forma um ângulo de  $30^\circ$  com a horizontal (ver figura). Qual é o valor máximo da velocidade inicial do cilindro para que ele possa rolar para este plano sem saltar?

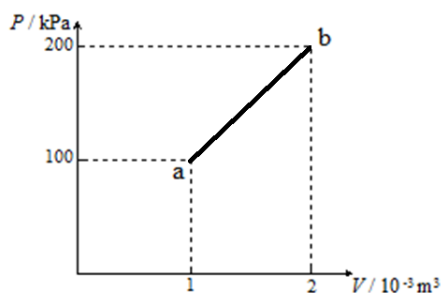


4. Uma placa de um material isolador tem uma densidade volumétrica de carga positiva uniforme  $\rho$ . A placa é infinita em duas das suas dimensões e tem largura  $d$ , como se mostra, em corte, na figura.



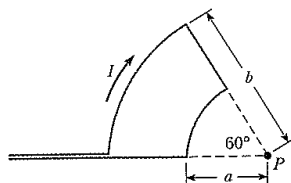
- (a) Determinar o campo eléctrico no interior da placa, num ponto à distância  $x$  do centro (ponto  $O$ ).
- (b) Considerar um electrão (carga  $-e$  e massa  $m_e$ ) colocado no interior da placa num ponto à distância  $x$  do centro. Mostrar que o electrão terá um movimento harmónico simples e determinar a frequência desse movimento.

5. Um gás perfeito realiza o processo representado na figura. No processo ab o fluxo de calor para o sistema é 600 J. Determinar, em joules, o trabalho no processo ab e a variação de energia interna. Mostrar que se trata de um gás monoatômico. Determinar, em função da constante (molar) dos gases perfeitos,  $R$ , a capacidade térmica molar média no processo ab.

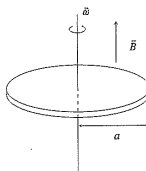


## II Electromagnetismo

1. O circuito da figura, formado por dois arcos de circunferência com centro em P e dois segmentos radiais, é percorrido por uma corrente de intensidade  $I$ .



- (a) Determinar o campo magnético  $\vec{B}$  no ponto P.
- (b) Determinar as forças exercidas sobre este circuito por um condutor rectilíneo infinito, percorrido por uma corrente  $I'$  e colocado no ponto P, perpendicularmente ao plano do papel. Qual é o efeito que as referidas forças produzem sobre o circuito?
2. Um disco metálico de massa  $m$  e raio  $a$  está colocado numa região onde existe um campo magnético uniforme,  $\vec{B}$ , paralelo ao eixo do disco. Quando o disco é colocado a girar em torno do eixo com velocidade angular  $\vec{\omega}$ , estabelece-se uma diferença de potencial  $V$  entre a borda do disco e o eixo de rotação.



- (a) Considerando que a velocidade angular  $\vec{\omega}$  e o campo magnético  $\vec{B}$  têm o mesmo sentido, mostrar que, quando se atinge o regime estacionário, a diferença de potencial  $V$  é dada pela expressão

$$V = \frac{\phi}{T},$$

em que  $\phi$  é o fluxo do campo magnético através do disco e  $T$  o período de rotação.

- (b) Quando se liga uma resistência  $R$  entre o eixo e um ponto da borda do disco, passa uma corrente no circuito. Nestas condições, a energia cinética de rotação do disco  $E_c$  diminui com o tempo, devido ao efeito Joule, de acordo com a equação

$$\frac{dE_c}{dt} = -\frac{E_c}{\tau},$$

onde  $\tau$  designa um tempo característico. Expressar  $\tau$  em função dos parâmetros conhecidos.

- (c) Os resultados obtidos para discos são válidos para cilindros. Verificou-se experimentalmente que um cilindro de cobre de massa  $m = 1$  kg e raio  $a = 2$  cm, colocado num campo  $B = 1$  T e com uma resistência de  $10\ \Omega$  entre o eixo e a borda, parou cerca de 10 minutos depois de começar a girar. Pode-se explicar esta observação considerando apenas a dissipação de energia por efeito Joule na resistência? Justificar a resposta.

### III Porcos oscilantes...

Após muitas e variadas tentativas, o Lobo Mau conseguiu capturar um dos 3 porquinhos. Para se desferrar de todas as tropelias que lhe tinham feito, resolveu pendurá-lo no topo de um penhasco e assá-lo lentamente numa fogueira acesa no fundo do penhasco. Dada a corpulência do porquinho, nenhuma das cordas que o Lobo Mau encontrou na casa deste o suportava. Depois de uma aturada pesquisa, o Lobo Mau lá descobriu uma corda de *bungee jumping* com a robustez necessária, atou o porquinho a essa corda e deixou-a esticar-se lentamente, ficando a sua pobre vítima suspensa sobre a fogueira.



1. Antes de pendurar o porquinho, para ter a certeza que a corda elástica que ia usar não ia esticar tanto que o porquinho ficasse demasiado queimado, o Lobo Mau resolveu determinar o comprimento máximo da corda que garantia um assado de qualidade. Para sua grande surpresa, os seus cálculos estavam errados, pois o porquinho ficou sentado na fogueira. Onde estaria o erro? Depois de pensar um pouco, o LM reparou que tinha cometido um erro crasso: a massa da corda não era desprezável, como ele inicialmente assumira...

Seja  $\ell_0$  o comprimento óptimo da corda determinado pelo Lobo Mau e  $k$  a constante elástica desta. Designe-se por  $\ell = \ell_0 + \Delta\ell$  o comprimento da corda quando o porquinho, de massa  $M$ , é nela suspenso (a corda é perfeitamente elástica). Sejam ainda  $h$  a altura do penhasco e  $m$  a massa da corda.

- (a) Qual foi o valor de  $\Delta\ell$  determinado pelo LM ao assumir que a massa da corda era desprezável?
  - (b) Para ter em conta a massa da corda pode-se imaginá-la dividida em vários segmentos de igual massa  $dm$ . Na ausência de gravidade, todos estes segmentos têm o mesmo comprimento  $dz$ . Mas, na presença de um campo gravítico, os segmentos esticam de uma forma não uniforme. Considere-se um segmento de comprimento “original”  $dz$  localizado entre os pontos  $z$  e  $z + dz$ , em que  $z$  é medido verticalmente partindo do topo para o fundo do penhasco e a coordenada  $z$  indica a posição desse ponto da corda na ausência de gravidade. Qual é a constante elástica deste segmento?
  - (c) Assumindo que a constante elástica de um pequeno segmento da corda não se altera quando este é esticado, determinar a elongação real da corda quando o porquinho é suspenso. (Sugestão: o extremo superior de cada segmento desloca-se o mesmo que o extremo inferior do segmento imediatamente acima deste, mas o segmento de cima está sujeito a uma carga superior.) Escrever esta elongação na forma  $\Delta\ell = m_{\text{ef}}g/k$ , com  $m_{\text{ef}} = M + \alpha m$ , e determinar  $\alpha$ .
2. Para corrigir o seu erro, o LM puxa a corda e deixa o porquinho a 2 m do chão como pretendia. Mas na sequência deste processo o porquinho fica a oscilar para cima e para baixo, i.e., a elongação da corda deixa de ser constante... Convencido que a sua análise da situação estática (alínea 1c) se mantém válida, o LM estima que o período destas oscilações seja  $T = 2\pi\sqrt{m_{\text{ef}}/k}$ . Mas o porco está a oscilar com uma frequência diferente da esperada... O LM imediatamente conclui que o valor de  $m_{\text{ef}}$  numa situação dinâmica é diferente do valor estático. Assim,  $\alpha$  deve ter um valor diferente quando há oscilações!
  - (a) Numa primeira abordagem ao problema, o LM assume que a corda se estica uniformemente. Então um ponto da corda à distância  $z$  da beira do penhasco (medida quando a corda não está de todo esticada) move-se, num dado instante, com uma velocidade que é proporcional a  $z$ ,  $v(z) = \gamma z$  (assumindo também que a corda é homogénea e assim se mantém). Relacionar  $\gamma$  com a velocidade do porco nesse instante,  $v_P(t)$ .
  - (b) Determinar a energia cinética de um segmento de comprimento  $dz$  da corda.
  - (c) Obter a energia cinética total do sistema porco+corda.
  - (d) Qual é o período de oscilação do porco, i.e., qual é o valor “dinâmico” de  $\alpha$ ? E em torno de que ponto oscila o porco?

3. O LM estabiliza as oscilações do porco e resolve pensar um pouco mais no problema das cordas elásticas enquanto espera pelo porco assado.

- (a) Designe-se por  $y(z, t)$  a posição, no instante  $t$ , do ponto de coordenada  $z$  da corda ( $z$  é, como até agora, medido na ausência de gravidade). Se se designar por  $x(z, t) = y(z, t) - z$  o deslocamento deste ponto da corda, no instante  $t$ , em relação à sua posição na ausência de gravidade, a tensão nesse ponto, no instante  $t$ , é

$$T(z) = k\ell_0 \frac{dx}{dz}.$$

Determinar a resultante das forças que actuam sobre um segmento da corda de comprimento  $dz$ .

- (b) Obter a seguinte relação:

$$k\ell_0 \frac{d^2x}{dz^2} + \frac{mg}{\ell_0} = \frac{m}{\ell_0} \frac{d^2x}{dt^2}.$$

- (c) A equação anterior é a equação de uma onda que se propaga com velocidade

$$V = \ell_0 \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Desprezando o segundo termo do primeiro membro, i.e., assumindo que a densidade linear da corda é pequena, uma das soluções possíveis para esta equação é:

$$x(z, t) = A \sin\left(\frac{\omega}{V}z\right) \sin(\omega t + \delta).$$

Mostrar que as frequências de oscilação são determinadas pela equação transcendente

$$\cotg(\beta\ell_0) = \frac{M}{m}\beta\ell_0.$$