

XI Olimpíada Ibero-Americana de Física - OIBF 2006

Coimbra, Portugal, 23-30 de Setembro de 2006

PROVA TEÓRICA

INSTRUÇÕES:

- 1 - O tempo disponível é de 5 h.
- 2 - Escreva claramente o seu nome e país na respectiva folha. **NÃO se identifique de qualquer forma nas restantes folhas da prova.** Escreva também o número de folhas que utilizou na resolução da prova, incluindo aquela em que se identifica.
- 3 - Tem à sua disposição dois tipos de folhas: folhas brancas com logótipo, que são as folhas de resposta onde só pode escrever no lado com o logótipo; e folhas de rascunho (em papel reciclado) que são para entregar mas que NÃO serão corrigidas.
- 4 – Identifique claramente o problema e a alínea a que está a responder.
- 5 – Sempre que começar a responder a um novo problema, utilize uma NOVA folha de resposta. NUNCA misture numa mesma folha respostas a problemas diferentes. Por exemplo, NÃO comece a responder ao problema 3 na folha onde já tenha respondido ao problema 2.
- 6 - Quando terminar, organize e numere todas as folhas de maneira lógica (no canto superior direito), e coloque-as no envelope juntamente com o enunciado e as folhas de rascunho. Se, por exemplo, tiver escrito **12** páginas (incluindo a que tem a sua identificação), a **3ª** página deve ser a **3 / 12**.
- 7 - Não é permitido levar consigo qualquer papel nem qualquer outro material que esteja no posto de trabalho.

1. Planeta-disco (8 pontos)

Os livros da série *Discworld* de Terry Pratchett passam-se num planeta com a forma invulgar/curiosa de um disco plano.

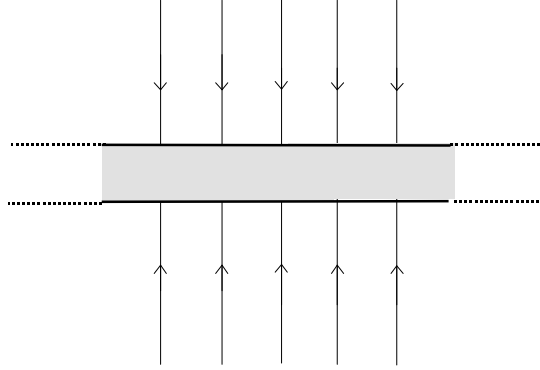


Figura 1: Um planeta em forma de disco plano.

Crê-se que o planeta está suportado em quatro grandes elefantes que viajam no espaço sobre uma enorme tartaruga, mas esses detalhes não são relevantes.

Interessa-nos aqui explorar aspectos do campo gravítico/gravitacional/gravitacional de um planeta plano, usando as semelhanças entre a lei da gravitação universal e a lei de Coulomb:

$$\vec{F}_g = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{e}_r \quad (\text{gravitação})$$

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{e}_r \quad (\text{Coulomb})$$

(Dado: raio da Terra, $R_T = 6,4 \times 10^6$ m)

(a) Segundo a Lei de Gauss, o fluxo do campo eléctrico/elétrico através de uma superfície fechada é dado por

$$\Phi_e = \frac{q}{\epsilon_0}$$

onde q é a carga no interior da superfície.

Escreva a forma correspondente da Lei de Gauss para o campo gravítico/gravitacional.

(b) Usando a Lei de Gauss, determine o valor do campo gravítico/gravitacional no exterior de um planeta com a forma de disco, num ponto próximo da superfície e afastado das bordas. A espessura do disco é muito menor do que o seu raio e pode ser desprezada. Considere que μ é a densidade superficial de massa do planeta (massa por unidade de área).

(c) Nesta parte vai considerar que *Discworld* é um planeta com espessura, com uma massa volúmica (ou densidade) igual à da Terra, ρ_T , e uma aceleração da gravidade à sua superfície, g_D , igual à da Terra, g . Encontre a relação entre a espessura de *Discworld* e o raio da Terra.

(d) Há um buraco que atravessa toda a espessura de *Discworld*. Supondo que o interior do planeta tem massa volúmica (ou densidade) uniforme, use a Lei de Gauss para mostrar que o campo gravítico/gravitacional num buraco perpendicular à superfície tem a forma $\vec{g} = g(z)\hat{e}_z$, com

$$g(z) = -\frac{2g_D}{d} z,$$

em que z é a coordenada vertical com origem no plano médio do planeta e g_D é o módulo da aceleração da gravidade à superfície.

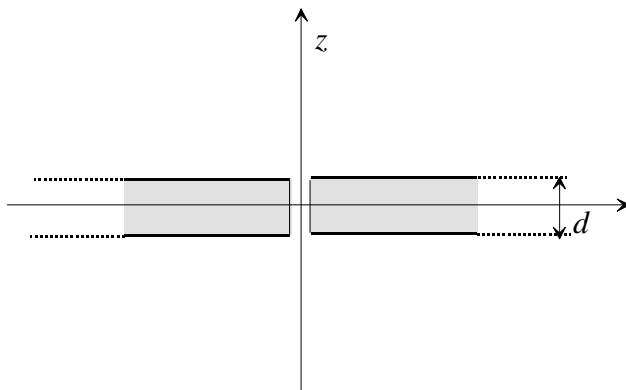


Figura 2: Um buraco que atravessa toda a espessura do *Discworld*.

(e) Mostre que um objecto/objeto qualquer que se deixa cair da borda do poço vai oscilar harmonicamente e determine o período do movimento.

2. Disco de Faraday (8 pontos)

Um disco metálico (massa m , raio a) está colocado numa região onde existe um campo magnético uniforme, \vec{B} , dirigido segundo o eixo do disco. Se o disco for colocado a girar em torno do eixo com velocidade angular $\vec{\omega}$, estabelece-se uma diferença de potencial, ΔV , entre a borda do disco e o eixo de rotação.

(a) Determine a força magnética, \vec{F}_m , sobre as cargas livres do metal.

(b) Quando se alcança o regime estacionário, a resultante das forças eléctrica/elétrica e magnética sobre as cargas livres do metal deve ser nula. Se a velocidade angular $\vec{\omega}$ e o campo magnético \vec{B} tiverem o mesmo sentido, como mostra a figura, mostre que a diferença de potencial, ΔV , é dada pela expressão

$$\Delta V = \frac{\phi}{T}$$

em que ϕ é o fluxo do campo magnético através do disco e T o período de rotação.

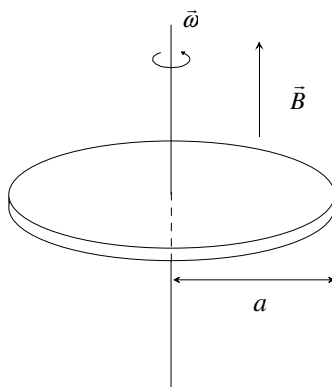


Figura 1: Disco metálico em rotação num campo magnético uniforme.

(c) Imagine que é ligada uma resistência exterior R entre o eixo e a borda do disco, de modo a permitir passagem de corrente. A diferença de potencial e a velocidade angular diminuem com o tempo, mas, em cada instante, ΔV é a mesma que existiria com o circuito aberto, para essa velocidade angular. Fazendo um balanço de energia, mostre que a energia cinética de rotação do disco, E_c , diminui com o tempo, por efeito Joule, de acordo com a equação

$$\frac{dE_c}{dt} = -\frac{E_c}{\tau}$$

onde τ é um tempo característico. Exprima τ em função dos parâmetros conhecidos.

(d) Os resultados obtidos para discos são válidos para cilindros. Comprovou-se experimentalmente que um cilindro de cobre de massa $m = 1$ kg e raio $a = 2$ cm, colocado num campo $B = 1$ T, e com uma resistência de 10Ω entre o eixo e a borda, parou cerca de 10 minutos depois de começar a girar. Pode-se explicar esta observação experimental considerando apenas a dissipação de energia por efeito Joule na resistência? Justifique a sua resposta.

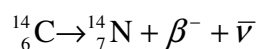
3. Precisão da datação por carbono 14 (6 pontos)

Um isótopo diz-se radioactivo/radioativo quando, por exemplo, por emissão (ou captura) de alguma partícula, pode transformar-se noutra. Nestes tipos de transformação, ou decaimento, a taxa de desintegração, i.e., o número de átomos que sofrem o processo, por unidade de tempo, é proporcional ao número de átomos existentes, N . Matematicamente, isto é descrito por

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N,$$

onde λ é uma constante característica de cada processo, que se designa por *constante de decaimento* (ou *constante de desintegração*).

Em resultado do constante bombardeamento da parte superior da atmosfera por raios cósmicos, o azoto 14 pode transformar-se em carbono 14 segundo a reacção/reacção $^{14}_7\text{N} + n \rightarrow ^{14}_6\text{C} + p$. Por sua vez, o carbono 14 é radioactivo/radioativo, com um tempo de meia-vida de 5700 anos, e decai para azoto 14 segundo a reacção/reacção



($\bar{\nu}$ representa um antineutrino).

O carbono 14 mistura-se com os outros isótopos de carbono existentes na natureza, tal como o carbono 12, fazendo com eles parte dos compostos orgânicos. A percentagem deste isótopo de carbono nos seres vivos é praticamente constante ao longo da sua vida. Quando o ser vivo morre, deixa de haver trocas de carbono com o exterior e o teor em carbono 14 vai baixando devido ao seu decaimento radioactivo/radioativo, ao passo que a quantidade de carbono 12 permanece constante. Desta forma, é possível efectuar/efetuar a datação de uma amostra através da medição da radioactividade/radioatividade presente.

(a) Relacione o tempo de meia-vida de uma amostra radioactiva/radioativa (tempo que decorre até que o número de núcleos radioactivos/radioativos se reduz para metade) com a constante de decaimento e calcule o valor desta para o carbono 14.

(b) Determine a idade de uma amostra que contém 10% do carbono 14 existente num ser vivo.

(c) Tendo em atenção que actualmente/atualmente se consegue detectar/detetar uma percentagem mínima de 0,06% do carbono 14 existente numa amostra, estime qual é a idade máxima que se consegue determinar com esta técnica de datação.

(d) A actividade/atividade é o número de desintegrações por unidade de tempo. Qual é a actividade/atividade de uma amostra de carbono onde existam 10^{15} átomos de carbono 14.

4. Arrefecimento/resfriamento de átomos (8 pontos)

O prémio/prémio Nobel em Física foi atribuído, em 1997, a Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji e William D. Philips pela sua contribuição no desenvolvimento de métodos para arrefecer/resfriar e aprisionar átomos. Eric A. Cornell, Wolfgang Ketterle e Carl E. Wieman utilizaram estes métodos para obter a condensação (o condensado) de Bose-Einstein em gases diluídos de átomos alcalinos, tendo por isso recebido o prémio/prémio Nobel em Física em 2001. A base desses métodos é a técnica que se designa por “*laser cooling*”, na qual se utiliza a colisão entre fotões/fótons (provenientes de um laser) e os átomos do gás que se pretende arrefecer/resfriar. O laser emite fotões/fótons com uma energia tal que um fotão/fóton pode ser absorvido quando colide com um átomo do gás.

Pretende-se arrefecer/resfriar um gás de átomos de sódio ($M = 23 \text{ g/mol}$) que se encontra à temperatura 300 K com um laser que emite fotões/fótons com uma energia tal que um átomo de sódio, ao absorver um fotão/fóton, transita/salta do estado fundamental ($E_{\text{fund}} = -5,14 \text{ eV}$) para o primeiro estado excitado ($E_{\text{exc}} = -3,04 \text{ eV}$).

Pode considerar que a temperatura do gás, T , se relaciona com a energia cinética média, E_c , dos átomos de sódio através da expressão

$$E_c = \frac{3}{2} k_B T,$$

onde k_B é a constante de Boltzmann.

Dados: $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$; $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$; $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J s}$; $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$.
 $1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}$.

Considere que os átomos são não-relativistas/relativísticos.

(a) Qual é a velocidade média de um átomo de sódio num gás a 300 K?

(b) Obtenha uma expressão para a variação da velocidade de um átomo de sódio quando colide frontalmente com um fotão/fóton do referido laser. Calcule o valor numérico para

essa variação, considerando que a energia do fóton/fóton absorvido é *exactamente/exatamente igual* à energia da transição. Quantas colisões deste tipo seriam necessárias para parar um átomo de sódio?

(c) Na realidade, como a variação da energia cinética do átomo não é nula, a energia do fóton/fóton *não é exactamente/exatamente igual* à energia da transição.

(c.1) Mostre que a variação de energia cinética do átomo associada à absorção do fóton/fóton numa colisão frontal se pode escrever

$$\Delta E_c = -m|v_i||\Delta v| + \frac{1}{2}m|\Delta v|^2,$$

onde as grandezas $|v_i|$ e $|\Delta v|$ se referem aos módulos dos vectores/vetores *velocidade inicial* e *variação da velocidade do átomo*, respectivamente.

(c.2) Calcule a razão $\Delta E_c / E_{\text{fóton}}$ para os átomos, usando a velocidade obtida em (a), considerando que, neste caso, a primeira parcela da expressão acima para ΔE_c é a dominante (ou seja, a segunda parcela do segundo membro dessa expressão pode ser desprezada) e que se pode usar para a variação de velocidade do átomo o resultado encontrado na alínea (b).

(d) A temperatura final atingida num arrefecimento/resfriamento deste tipo é limitada inferiormente por aquilo que se designa o limite de recuo (*recoil limit*) associado ao recuo dos átomos na emissão e absorção.

(d.1) Obtenha uma expressão para a variação de energia cinética de um átomo com velocidade inicial nula que absorve um fóton/fóton e mostre que, neste caso, a energia do fóton/fóton tem que ser superior à energia da transição atômica/atômica.

(d.2) Calcule a variação de energia cinética da alínea anterior, sabendo que $E_{\text{fóton}}^2 / mc^2$ pode ser aproximado por $E_{\text{transição}}^2 / mc^2$, onde m representa a massa do átomo de sódio e $E_{\text{fóton}}$ a energia do fóton/fóton absorvido.

(d.3) Considere que o átomo que absorveu um fóton/fóton nas condições da alínea anterior, ficando no estado excitado, emite um fóton/fóton na mesma direcção/direção e sentido oposto ao da sua velocidade. Calcule a variação de energia cinética do átomo. Também

neste caso pode usar a aproximação $E'_{\text{fotão}}/mc^2 \approx E_{\text{transição}}^2/mc^2$ em que $E'_{\text{fotão}}$ é a energia do fóton/fóton emitido.

(d.4) Considerando este processo de absorção e emissão calcule o ganho de energia final do átomo e a temperatura a que corresponde. Qual é a importância do processo no arrefecimento/resfriamento de átomos?

1. Planeta-disco

(a) Fazendo as correspondências

$$\begin{aligned} q &\rightarrow m \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} &\rightarrow -G \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} &\rightarrow -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \end{aligned}$$

Se, por um lado, para o campo eléctrico, se tem

$$\Phi_e = \frac{q}{\epsilon_0}$$

a forma da Lei de Gauss para o campo gravítico é

$$\Phi_g = -4\pi G m .$$

(b) Usando uma superfície gaussiana que contenha as duas superfícies do planeta (ver figura mais à frente, esquema 1))

$$\Phi_g = 2g(z) A$$

em que $g(z)$ é a componente z da aceleração da gravidade à altitude z e A é a área da base da superfície gaussiana (superfície cilíndrica, por exemplo). Como a massa no interior da superfície gaussiana é

$$\Delta m = \mu A$$

vem

$$2g(z) A = -4\pi G \mu A \quad \text{ou} \quad g(z) = -2\pi G \mu$$

de onde resulta

$$g(z) = -g_{Dw} = -2\pi G \mu .$$

O campo é uniforme e não varia com a distância à superfície (desde que a aproximação de planeta “sem espessura” seja razoável).

(c) Se o planeta tiver massa volúmica ρ , então $\mu = \rho d$, em que d é a espessura do planeta. Como

$$g_{Dw} = 2\pi G \rho_{Dw} d ,$$

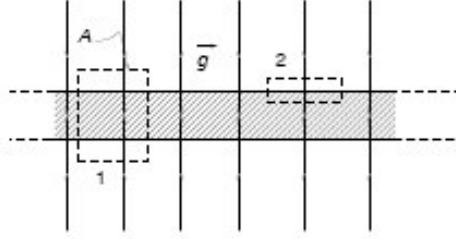
e sendo $g_{Dw} = g$ e $\rho_{Dw} = \rho_T = \rho$,

$$g = 2\pi G \rho d .$$

Por outro lado, à superfície da Terra, $g = \frac{GM_T}{R_T^2} = \frac{4}{3}\pi R_T G \rho$. Inserindo na expressão

acima,

$$d = \frac{2}{3} R_T = 4,3 \times 10^6 \text{ m.}$$



(d) Usando novamente uma superfície de Gauss com uma base fora do planeta, onde o campo é $-g_{Dw}$ e a outra dentro e à distância z do plano central (figura acima, esquema 2), onde o campo é $-g(z)$, vem

$$\Phi = -g_{Dw}A - g(z)A.$$

A massa contida no interior da superfície de Gauss é $\Delta m = A\rho(d/2 - z)$ pelo que o fluxo de campo gravítico também é dado por

$$\Phi = -4\pi GA\rho\left(\frac{d}{2} - z\right).$$

Igualando agora as duas expressões obtidas para o fluxo, vem (notar que $g_{Dw} = 2\pi G\rho d$)

$$g_{Dw} + g(z) = 4\pi G\rho\left(\frac{d}{2} - z\right) = g_{Dw}\left(1 - \frac{2z}{d}\right)$$

e, finalmente,

$$g(z) = -g_{Dw} \frac{2z}{d}$$

(e) Como mostra a última expressão, a aceleração gravítica é proporcional à distância ao plano central, ou seja pode escrever-se na forma

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\omega^2 z.$$

O movimento de uma partícula largada da superfície do planeta para dentro do poço é harmónico simples com frequência angular

$$\omega = \sqrt{\frac{2g_{Dw}}{d}}.$$

O período é, pois,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{d}{2g_{Dw}}}$$

Usando a expressão $d = \frac{2}{3}R_T$ e substituindo valores, encontra-se

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R_T}{3g_{Dw}}} = 48,9 \text{ minutos}$$

2. Disco de Faraday

(a) Na ausência de corrente a velocidade dos electrões é igual à velocidade de cada ponto do cilindro:

$$\vec{v} = \omega r \hat{e}_\theta$$

Como $\vec{B} = B \hat{e}_z$ a força magnética sobre os electrões é dada por

$$\vec{F}_m = -e\vec{v} \times \vec{B} = -e\omega r B \hat{e}_r$$

ou seja

$$\boxed{\vec{F}_m = -eB\omega r \hat{e}_r.}$$

(b) Para que a força electromagnética $\vec{F}_{em} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ seja nula surge um campo eléctrico induzido tal que

$$\vec{E} = -B\omega r \hat{e}_r.$$

Este campo depende da distância ao eixo de rotação, $E(r) = -B\omega r$. O campo eléctrico aponta do exterior para o interior. Logo, a periferia do cilindro fica a um potencial maior do que o seu centro. A diferença de potencial entre qualquer ponto da periferia do cilindro (P) e o centro (C) é

$$V_P - V_C = \Delta V = \frac{1}{2} \omega B a^2.$$

Designando a secção recta do cilindro por A , tem-se $A = \pi a^2$ e a equação acima pode escrever-se $\Delta V = \frac{\omega}{2\pi} BA$. Por um lado, $\frac{\omega}{2\pi} = T^{-1}$ é o inverso do período de rotação; por outro lado, $BA = \phi$ é o fluxo do campo magnético através da secção recta do cilindro. Portanto,

$$\boxed{\Delta V = \frac{\phi}{T}}$$

(c) Se o gerador de Faraday estiver ligado a uma resistência externa, R , a corrente que passa na resistência é

$$i = \frac{\Delta V}{R}$$

e a potência dissipada por efeito Joule é

$$P = \frac{(\Delta V)^2}{R} = \frac{\omega^2 \phi^2}{4\pi^2 R}$$

Como a energia se conserva, esta potência dissipada corresponde à variação da energia cinética do cilindro por unidade de tempo. A energia cinética do cilindro é

$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2$$

sendo $I = \frac{1}{2}ma^2$ o momento de inércia do cilindro de massa m . A conservação de energia permite escrever

$$\frac{dE_c}{dt} = -\frac{\omega^2 \phi^2}{4\pi^2 R} = -\frac{\phi^2}{2\pi^2 IR} E_c$$

e, finalmente,

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = -\frac{E_c}{\tau}}, \quad \text{com } \tau = \frac{2\pi^2 I R}{\phi^2} \quad \text{ou ainda} \quad \boxed{\tau = \frac{m R}{B^2 a^2}}.$$

(d) Para $B = 1 \text{ T}$, e $A = \pi a^2 = 4\pi \times 10^{-4} \text{ m}^2$, vem $\phi = 4\pi \times 10^{-4} \text{ Wb}$. Por outro lado, $I = ma^2/2 = 1 \times 4 \times 10^4 / 2 = 2 \times 10^4 \text{ kg m}^2$ e $R = 10 \text{ } \Omega$. Portanto,

$$\tau = \frac{4\pi^2 \times 10^{-3}}{16\pi^2 \times 10^{-8}} = 25000 \text{ s} \approx 6,9 \text{ horas}.$$

Sendo este o valor da constante de tempo, o cilindro, para parar ao fim de 10 minutos, terá de existir um outro mecanismo de dissipação de energia.

3. Datação por carbono-14

A lei do declínio radioactivo escreve-se

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

Por definição, para $t = T_{1/2}$ (tempo de meia-vida) tem-se $N = N_0 / 2$:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}.$$

Tomando logaritmos, $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(e^{-\lambda T_{1/2}})$ que é equivalente a

$$\ln(1) - \ln(2) = -\lambda T_{1/2}$$

e, finalmente,

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

A constante de decaimento é $\lambda = \ln 2 / T_{1/2} = \ln 2 / 5700 \text{ anos}^{-1}$:

$$\lambda = 1,216 \times 10^{-4} \text{ anos}^{-1}.$$

(b) Admitindo que o fóssil tinha, quando morreu, o mesmo teor de carbono-14 que o ser vivo actual, podemos escrever

$$N_{\text{fóssil}}(t) = N_{\text{ser vivo}} e^{-\lambda t}$$

No caso em análise, $N_{\text{fóssil}} / N_{\text{ser vivo}} = 0,1$ e portanto $0,1 = e^{-\lambda t}$ ou

$$t = -\frac{\ln(0,1)}{\lambda} = -\frac{\ln(0,1)}{1,216 \times 10^{-4}}$$

e

$$t = 1,89 \times 10^4 \text{ anos.}$$

(c) Escrevemos agora $e^{-\lambda t} = \frac{0,0006 \times N_{\text{ser vivo}}}{N_{\text{ser vivo}}}$, donde

$$t = -\frac{\ln(0,0006)}{\lambda} = -\frac{\ln(0,0006)}{1,216 \times 10^{-4}}$$

e

$$t \approx 61\,000 \text{ anos.}$$

(d) A actividade é $R = -\frac{dN}{dt} = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$ ou $R = R_0 e^{-\lambda t}$ com $R_0 = \lambda N_0$ (e $R = \lambda N$).

Para $N = 10^{15}$ e $\lambda = 3,856 \times 10^{-12}$ vem

$$R = 3856 \text{ desintegrações/segundo}$$

4. Arrefecimento de átomos

a) De

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T$$

obtem-se

$$v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

e, substituindo valores (a massa do átomo de sódio é $m = 3,819 \times 10^{-26}$ kg), vem

$$v = 570 \text{ m/s.}$$

(Nota: considerou-se a velocidade média igual à velocidade quadrática média.)

b)



A conservação do momento linear segundo a direcção do movimento permite escrever:

$$\vec{p}_{\text{final átomo}} = \vec{p}_{\text{fóton}} + \vec{p}_{\text{inicial átomo}}$$

ou ainda $\Delta \vec{p}_{\text{átomo}} = \vec{p}_{\text{fóton}}$. Segundo o eixo Ox, $\Delta p_{\text{átomo}} = -h/\lambda = -E_{\text{fóton}}/c$ pelo que a variação da velocidade do átomo é

$$\Delta v = -\frac{E_{\text{fóton}}}{mc}.$$

De acordo com a aproximação sugerida no enunciado, $E_{\text{fóton}} \approx E_{\text{transição}} = E_{\text{exc}} - E_{\text{fund}} = -3,04 + 5,14 = 2,10 \text{ eV} = 3,36 \times 10^{-19} \text{ J}$. A variação de velocidade em cada colisão frontal, $\Delta v = -E_{\text{fóton}}/mc$, é, substituindo valores,

$$\Delta v = -2,93 \times 10^{-2} \text{ m/s}$$

Seriam necessárias $570/(2,93 \times 10^{-2}) = 1,94 \times 10^4$ colisões.

c) Vamos considerar todas as grandezas vectoriais projectadas na direcção Ox.

(c.1) A energia cinética final do átomo é

$$E_{\text{c final}} = \frac{1}{2}m(|v_i| - |\Delta v|)^2 = \frac{1}{2}m(|v_i|^2 - 2v_i|\Delta v| + |\Delta v|^2) = E_{\text{c inicial}} + \frac{1}{2}m(-2v_i|\Delta v| + |\Delta v|^2)$$

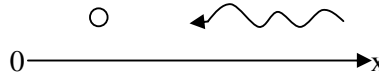
e, portanto,

$$\Delta E_c = -m|v_i||\Delta v| + \frac{1}{2}m|\Delta v|^2$$

(c.2) Desprezando o segundo termo na expressão anterior $\Delta E_c \approx -m|v_i||\Delta v|$ e usando o resultado da alínea (b), $\Delta v = -\frac{E_{\text{fotão}}}{mc}$, encontra-se

$$\boxed{\frac{\Delta E_c}{E_{\text{fotão}}} \approx -\frac{|v_i|}{c} = -1,9 \times 10^{-6}.$$

(d.1)



A conservação de momento linear permite concluir que a variação de velocidade do átomo é, tal como encontrámos na alínea (b), $\Delta v = -\frac{E_{\text{fotão}}}{mc}$. Esta é, pois, a velocidade final do átomo depois de absorver o fóton. A variação de energia cinética do átomo é, portanto,

$$\boxed{\Delta E_c = \frac{1}{2} \frac{E_{\text{fotão}}^2}{m c^2}}$$

Esta energia tem de ser fornecida pelo fóton, logo $E_{\text{fotão}} = E_{\text{transição}} + \Delta E_c$

$$E_{\text{fotão}} = E_{\text{transição}} + \frac{1}{2} \frac{E_{\text{fotão}}^2}{m c^2} \quad \text{de onde se conclui que} \quad \boxed{E_{\text{fotão}} > E_{\text{transição}}}$$

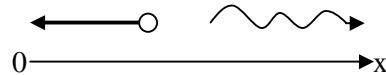
(d.2) Como $\frac{E_{\text{fotão}}^2}{m c^2} \approx \frac{E_{\text{transição}}^2}{m c^2} = 3,28 \times 10^{-29} \text{ J}$, a variação de energia cinética do átomo é

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} \frac{E_{\text{transição}}^2}{m c^2}, \text{ ou seja}$$

$$\boxed{\Delta E_c = 1,64 \times 10^{-29} \text{ J.}}$$

(d.3) Na emissão do fóton, tal como na absorção há conservação do momento linear.

$$\vec{p}_{\text{inicial átomo}} = \vec{p}_{\text{final átomo}} + \vec{p}_{\text{fotão}}$$



$$m \vec{v}_i = m \vec{v}_f + \vec{p}_{\text{fotão}}$$

A velocidade inicial do átomo aponta agora no sentido negativo de 0x. Vimos em (d.1) que esta velocidade inicial é $-\frac{E_{\text{fotão}}}{mc}$. Como o fóton é emitido no sentido positivo, podemos escrever

$$mv_f + \frac{E'_{\text{fotão}}}{c} = -\frac{E_{\text{fotão}}}{c}$$

onde $E'_{\text{fotão}}$ é a energia do fóton emitido ($E_{\text{fotão}}$ é a energia do fóton absorvido). Portanto,

$$v_f = -\frac{E_{\text{fotão}} + E'_{\text{fotão}}}{mc}$$

A variação da energia cinética do átomo é

$$\Delta E'_c = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}m \left[\left(-\frac{E_{\text{fotão}} + E'_{\text{fotão}}}{mc} \right)^2 - \left(-\frac{E_{\text{fotão}}}{mc} \right)^2 \right]$$

ou ainda

$$\Delta E'_c = \frac{1}{2} \left(\frac{2E_{\text{fotão}}E'_{\text{fotão}}}{mc^2} + \frac{E'^2_{\text{fotão}}}{mc^2} \right)$$

e, finalmente, na aproximação sugerida,

$$\Delta E'_c = \frac{3}{2} \frac{E_{\text{transição}}^2}{mc^2}$$

Esta variação de energia cinética na emissão é o triplo da encontrada na alínea (d.2):

$$\Delta E'_c = 4,92 \times 10^{-29} \text{ J.}$$

(d.4) Devido ao processo de absorção e emissão consecutiva, o átomo, inicialmente em repouso, adquire uma energia cinética $E_c = \Delta E_c + \Delta E'_c = 4,92 \times 10^{-29} + 1,64 \times 10^{-29}$ ou

$$E_c = 6,56 \times 10^{-29} \text{ J}$$

A temperatura correspondente é $T = \frac{2E_c}{3k_B}$, ou seja

$$T = 3 \mu\text{K} .$$

Este valor é muito pequeno (ordem dos microkelvins) pelo que o processo pode ser desprezado no arrefecimento. Só tem importância próximo do zero absoluto (não sendo possível atingi-lo).