

Olimpíadas de Física 2006

Seleccção para as provas internacionais

Prova Teórica

Sociedade Portuguesa de Física

26/Maio/2006

Resolução da Prova Teórica

Duração da prova: 4h

I Vários tópicos

1. A energia gasta num salto de 1 m à superfície da Terra é:

$$E = mgh \simeq 10m \quad (1)$$

(m é a massa do saltador). Para que, dispendendo a mesma energia, o saltador escape da órbita de um satélite de raio r e massa $M = 4\pi r^3 \rho / 3$ (ficando depois em repouso!), a energia potencial gravítica à superfície deste deve ser exactamente igual, em módulo, à energia cinética adquirida no salto.

$$\frac{GMm}{r} = 10m \iff r = \frac{GM}{10} \iff r = \frac{4G\pi r^3 \rho}{30} \iff r = \sqrt{\frac{30}{4G\pi\rho}}. \quad (2)$$

2. Há conservação da quantidade de movimento no choque, logo, como as duas massas seguem juntas após o choque,

$$m_1 v = (m_1 + m_2) v'. \quad (3)$$

Então, a velocidade das massas após o choque é

$$v' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v. \quad (4)$$

Pode-se considerar que o aumento de temperatura do sistema tem origem na perda de energia cinética das massas (o choque é inelástico). Assim,

$$\Delta U = E_c^i - E_c^f = \frac{1}{2} m_1 v^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2. \quad (5)$$

Como $\Delta U = c(m_1 + m_2)\Delta T$,

$$\Delta T = \frac{1}{2} \frac{v^2}{c} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \quad (6)$$

e, no caso em que $m_1 = km_2$,

$$\Delta T(k) = \frac{1}{2} \frac{v^2}{c} \frac{k}{(k+1)^2}. \quad (7)$$

Os extremos de $\Delta T(k)$ obtêm-se trivialmente igualando a zero a derivada em ordem a k de $\Delta T(k)$:

$$\frac{d\Delta T(k)}{dk} = 0 \iff k = 1. \quad (8)$$

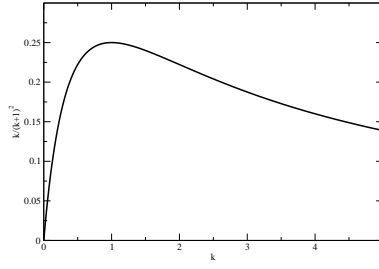


Figura 1: Aumento da temperatura das massas em função da razão m_1/m_2 .

3. Ao ser acelerada pela diferença de potencial V , uma partícula de massa m e carga q adquire velocidade $v = (2qV/m)^{1/2}$.

Sob a acção do campo magnético \vec{B} , cada partícula fica sujeita à força $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$, descrevendo uma trajectória circular, cujo raio R se obtém a partir de

$$qvB = \frac{mv^2}{R} \implies R = \frac{mv}{qB}$$

Substituindo na expressão de R a expressão de v , obtém-se:

$$R^2 = \frac{2mV}{qB^2},$$

ou seja, o quadrado do raio é proporcional à massa da partícula. Assim:

$$R_1 : R_2 : R_3 = 1 : 2 : 3 \implies m_1 : m_2 : m_3 = 1 : 4 : 9$$

4. Nesta colisão relativista há, obviamente, conservação da quantidade de movimento e da energia do sistema fóton+electrão (ver Figura 2):

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} \cos \theta + \gamma m v \cos \phi \\ 0 = \frac{h}{\lambda'} \sin \theta - \gamma m v \sin \phi \\ \frac{hc}{\lambda} + mc^2 = \frac{hc}{\lambda'} + \gamma mc^2 \end{array} \right. &\iff \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} \gamma m v \cos \phi = \frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} \cos \theta \\ \gamma m v \sin \phi = \frac{h}{\lambda'} \sin \theta \\ \frac{hc}{\lambda} + mc^2 = \frac{hc}{\lambda'} + \gamma mc^2 \end{array} \right. &\iff \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} (\gamma m v)^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 - \frac{2h^2}{\lambda\lambda'} \cos \theta + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 \\ \gamma m v \sin \phi = \frac{h}{\lambda'} \sin \theta \\ \frac{hc}{\lambda} + mc^2 = \frac{hc}{\lambda'} + \gamma mc^2 \end{array} \right. \quad (9) \end{aligned}$$

(v é a velocidade do electrão, m a sua massa e $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$). Ora, a quantidade de movimento do electrão é $p_e = \gamma m v$, logo

$$E_e^2 = m^2 c^4 + p_e^2 c^2 \iff (\gamma m c^2)^2 = m^2 c^4 + (\gamma m v)^2 c^2, \quad (10)$$

donde se conclui que

$$(\gamma m v)^2 = (\gamma^2 - 1) m^2 c^2. \quad (11)$$

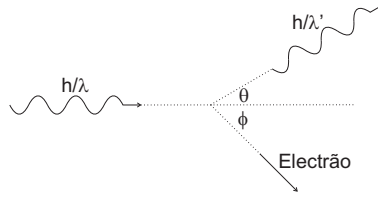


Figura 2: Diagrama esquemático do processo de dispersão de Compton.

Da última equação do sistema de equações (9) vem

$$\gamma mc = \left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} \right) + mc, \quad (12)$$

o que permite re-escrever a primeira equação do sistema como

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{\lambda^2} + \frac{h^2}{\lambda'^2} - \frac{2h^2 \cos \theta}{\lambda \lambda'} &= \left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} \right)^2 + 2mc \left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} \right) \iff \\ \iff \lambda' - \lambda &= \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta) = \frac{2h}{mc} \sin^2 \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (13)$$

A energia cinética do electrão pode-se obter subtraindo a sua energia em repouso à energia total:

$$T = \gamma mc^2 - mc^2 = \frac{hc}{\lambda} \frac{2 \frac{h}{mc\lambda} \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 + 2 \frac{h}{mc\lambda} \sin^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (14)$$

5. A força gravítica sobre o satélite decompõe-se em dois termos: uma componente radial, no plano da órbita, responsável pelo movimento circular do satélite, e uma componente na direcção perpendicular ao plano da órbita. Designando por R a coordenada radial no plano da órbita e por z a coordenada na direcção perpendicular ao plano da órbita, vem

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r} = -\frac{GMm}{R^2 + z^2} \left(\cos \theta \hat{R} + \sin \theta \hat{z} \right) \quad (15)$$

(θ é o ângulo que \vec{r} , o vector posição do satélite, faz com o plano da órbita). Ora, como

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \simeq \frac{z}{R} \\ \cos \theta = \frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}} \simeq 1 \end{cases} \quad (16)$$

a equação do movimento no plano perpendicular à órbita fica:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{GMm}{R^3} z, \quad (17)$$

que é a equação que descreve um movimento harmónico simples de frequência

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}. \quad (18)$$

Esta é precisamente a mesma frequência do movimento orbital.

II Electromagnetismo

1. (a) Por aplicação da lei de Gauss, mostra-se que cada uma das placas cria um campo eléctrico de grandeza $\sigma/2\varepsilon_0$ e direcção perpendicular às placas (desprezando os efeitos de bordos). Assim, o campo eléctrico na região entre as placas é $\vec{E} = \sigma/\varepsilon_0 \hat{y}$.

As equações de movimento para um ião positivo de massa m e carga q que entre na região entre as placas com velocidade $\vec{v} = v_0 \hat{x}$ são:

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \\ y &= \frac{d}{2} + \frac{1}{2} \frac{q\sigma}{\varepsilon_0 m} t^2 \end{aligned}$$

Para $x = \ell$ e $y = d/2$, obtém-se o valor máximo que σ pode ter:

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 m v_0^2 d}{q \ell^2}$$

Nestas condições o ião sai da região entre as placas, passando “a rasar” a placa colocada em $y = d$.

- (b) Para que a trajectória se mantenha rectilínea na direcção do eixo dos xx , a força total sobre os iões deve ser nula: $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = 0$, o que implica $B = \frac{E}{v_0}$. O campo magnético que deve ser aplicado é dado por $\vec{B} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 v_0} \hat{z}$.
- (c) A grandeza da força exercida sobre a porção elementar de carga dq de cada placa é $dF = dq E$, sendo E o campo criado pela outra placa e $dq = \sigma dS$. Esta força é perpendicular à placa e aponta para fora dela (as forças entre as placas são atractivas). Deste modo, teremos, por exemplo, a força por unidade de área que a placa em $y = 0$ exerce sobre a placa em $y = d$:

$$\frac{d\vec{F}}{dS} = -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \hat{y}$$

2. (a) O campo magnético no interior de uma bobina muito longa pode determinar-se usando a lei de Ampère: admitindo que o campo no exterior é nulo, obtém-se, no interior da bobina considerada, $\vec{B} = \mu_0 n I \hat{z}$ sendo $n = N/\ell$. A intensidade de corrente I determina-se a partir de

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t) = L \frac{dI}{dt} \implies I(t) = \frac{V_0}{\omega L} \sin(\omega t)$$

Assim, o campo magnético no interior da bobina é dado por $\vec{B} = B_0 \sin(\omega t) \hat{z}$, com $B_0 = \frac{\mu_0 n V_0}{\omega L}$

- (b) A força electromotriz (f.e.m.) induzida na bobina pequena é dada por

$$\varepsilon_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -N' \frac{d}{dt} (\vec{B} \cdot \hat{n} S) = -N' \omega B_0 \pi a'^2 \cos(\omega t)$$

A amplitude da f.e.m. induzida é $\varepsilon_0 = N' \omega B_0 \pi a'^2$, de onde conclui, atendendo a que $N' = N/4$ e $a' = a/4$, $B_0 = \frac{64\varepsilon_0}{\omega N \pi a^2}$.

Medindo a amplitude da f.e.m. induzida, determina-se B_0 e pode comparar-se este valor com o valor teórico calculado em (a).

- (c) Mesmo tratando-se de uma bobina muito longa, a expressão $\vec{B}(t) = B_0 \sin(\omega t) \hat{z}$ é aproximada, pois o campo é menos intenso nas extremidades da bobina: é cada vez menor o número de linhas de campo que atravessam a secção da bobina pequena e essas linhas são inclinadas em relação ao eixo dos zz ; portanto a amplitude da f.e.m. induzida que se mede deve ser menor.

III Boomerang

1. Para obter a velocidade de um ponto qualquer da lâmina basta reparar que a sua velocidade resulta da composição do movimento de translação do boomerang com a rotação deste em torno do centro de massa. Então, como a componente tangencial da velocidade do centro de massa é

$$v_{1t}^{\text{CM}}(t) = V \cos(\omega t), \quad (19)$$

a velocidade do ponto à distância r do centro de massa é

$$v_{1t}(r, t) = V \cos(\omega t) + \omega r. \quad (20)$$

2. Como se considera que a força sobre cada secção da lâmina é proporcional ao quadrado da velocidade tangencial dessa secção, a força sobre uma secção de largura dr à distância r do centro de massa é

$$dF_1(r, t) = c (V \cos(\omega t) + \omega r)^2 dr \quad (21)$$

$$= c (\omega^2 r^2 + 2\omega V r \cos(\omega t) + V^2 \cos^2(\omega t)) dr. \quad (22)$$

Para obter a força total basta integrar esta expressão sobre toda a lâmina

$$F_1(t) = \int_0^l c (\omega^2 r^2 + 2\omega V r \cos(\omega t) + V^2 \cos^2(\omega t)) dr \quad (23)$$

$$= c \left(\omega^2 \frac{l^3}{3} + 2\omega V \frac{l^2}{2} \cos(\omega t) + V^2 l \cos^2(\omega t) \right). \quad (24)$$

3. Sejam \hat{z} o versor da direcção vertical, sentido ascendente, \hat{x} o versor da direcção horizontal, no sentido do movimento inicial do centro de massa do boomerang e \hat{y} o versor da direcção perpendicular ao plano de rotação do boomerang, no sentido do momento angular inicial. Então o vector posição do ponto da lâmina 1 que se encontra à distância r do centro de massa é

$$\vec{r}_1(r, t) = r (\cos(\omega t) \hat{z} + \sin(\omega t) \hat{x}) \quad (25)$$

e a força determinada em (22) sobre este ponto da lâmina é

$$d\vec{F}_1(r, t) = c (\omega^2 r^2 + 2\omega V r \cos(\omega t) + V^2 \cos^2(\omega t)) dr \hat{y}. \quad (26)$$

O momento desta força é então

$$d\vec{M}_1(r, t) = \vec{r}_1(r, t) \times d\vec{F}_1(r, t) \quad (27)$$

$$= r (\cos(\omega t) \hat{z} + \sin(\omega t) \hat{x}) \times \quad (28)$$

$$\times c (\omega^2 r^2 + 2\omega V r \cos(\omega t) + V^2 \cos^2(\omega t)) dr \hat{y} \quad (29)$$

$$= cr (\omega^2 r^2 + 2\omega V r \cos(\omega t) + V^2 \cos^2(\omega t)) dr (\sin(\omega t) \hat{z} - \cos(\omega t) \hat{x}) \quad (30)$$

4. Tal como atrás, basta integrar sobre toda a folha a expressão anterior para obter o momento total:

$$\vec{M}_1(r, t) = \int_0^l d\vec{M}_1(r, t) \quad (31)$$

$$= c \left(\omega^2 \frac{l^4}{4} + 2\omega V \frac{l^3}{3} \cos(\omega t) + V^2 \frac{l^2}{2} \cos^2(\omega t) \right) (\sin(\omega t) \hat{z} - \cos(\omega t) \hat{x}) \quad (32)$$

5. Para obter a força total basta reparar que a contribuição das outras 3 lâminas difere apenas no argumento das funções trigonométricas, que serão $\omega t + \pi/2$, $\omega t + \pi$ e $\omega t + 3\pi/2$. Então, como

$$\cos(\omega t) + \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\omega t + \pi) + \cos\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) = 0 \quad (33)$$

e

$$\cos^2(\omega t) + \cos^2\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \cos^2(\omega t + \pi) + \cos^2\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) = 2, \quad (34)$$

a força total é

$$\vec{F}(t) = \left(\frac{4}{3} c \omega^2 l^3 + 2V^2 c l \right) \hat{y}. \quad (35)$$

6. Do mesmo modo que na alínea anterior, basta reparar que o argumento das funções trigonométricas muda para cada lâmina. Reparando que

$$\cos^3(\omega t) + \cos^3\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \cos^3(\omega t + \pi) + \cos^3\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) = 0, \quad (36)$$

$$\sin(\omega t) + \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\omega t + \pi) + \sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) = 0, \quad (37)$$

$$\begin{aligned} & \sin(\omega t) \cos(\omega t) + \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \\ & + \sin(\omega t + \pi) \cos(\omega t + \pi) + \sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

e

$$\begin{aligned} & \sin(\omega t) \cos^2(\omega t) + \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \cos^2\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \\ & + \sin(\omega t + \pi) \cos^2(\omega t + \pi) + \sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) \cos^2\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) = 0, \end{aligned} \quad (39)$$

conclui-se que

$$\vec{M}(t) = -\frac{4}{3} c \omega V l^3 \hat{x}. \quad (40)$$

Vê-se assim que o momento resultante é sempre perpendicular ao momento angular do boomerang, o que leva o momento angular a precessar, ‘rodando’ no sentido anti-horário, no plano horizontal, em torno do eixo vertical.

7. Como o boomerang é formado por 4 barras de espessura desprezável e comprimento l , o momento de inércia de cada lâmina em torno do eixo de rotação que passa pelo centro de massa é dado simplesmente pelo teorema de Steiner

$$I_l = \frac{1}{12} \frac{m}{4} l^2 + \frac{m}{4} \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} \frac{m}{4} l^2. \quad (41)$$

O momento de inércia total do boomerang é simplesmente a soma dos momentos de inércia das 4 lâminas:

$$I_l = 4 \frac{1}{3} \frac{m}{4} l^2 = \frac{1}{3} m l^2 . \quad (42)$$

Então, como o momento angular é dado por $L = I\omega$,

$$\omega_p = \frac{M}{L} = \frac{\frac{4}{3} c \omega V l^3}{\frac{1}{3} m l^2 \omega} = \frac{4 c V l}{m} . \quad (43)$$

8. Para que a força aerodinâmica seja centrípeta, a velocidade angular orbital deve ser igual à velocidade de precessão do momento angular, i.e.,

$$\frac{V}{R} = \omega_p , \quad (44)$$

em que R é o raio da trajectória. Então o raio da trajectória é

$$R = \frac{V}{\omega_p} = \frac{m}{4 c l} . \quad (45)$$

Nestas condições a força aerodinâmica é uma força centrípeta, i.e.,

$$\frac{4 c \omega^2 l^3}{3} + 2 c l V^2 = \frac{m V^2}{R} , \quad (46)$$

logo

$$V = \sqrt{\frac{2}{3}} \omega l . \quad (47)$$