

Olimpíadas de Física 2006

Seleção para as provas internacionais

Prova Teórica

Sociedade Portuguesa de Física

26/Maio/2006

Prova Teórica

Duração da prova: 4h

I Vários tópicos

1. Supondo que a altura que uma pessoa, em média, consegue saltar na Terra é 1 m, determinar o raio máximo de um asteroide esférico onde é possível saltar sem nunca mais voltar. A densidade média de um asteroide é $\rho = 3000 \text{ kg/m}^3$.
2. Uma bala de massa m_1 com velocidade v atinge um objecto de massa m_2 que se encontra em repouso. A bala fica incrustada e ambos os objectos seguem juntos. Os dois corpos são feitos do mesmo material, de capacidade térmica mássica c . Calcular a velocidade final e o aumento de temperatura do sistema. Considerar agora que $m_1 = km_2$ onde k é uma constante. Calcular o valor de k que maximiza o aumento de temperatura do sistema e representar graficamente esse aumento em função de k .
3. Três tipos de partículas com cargas iguais q e massas m_1 , m_2 e m_3 são aceleradas, a partir do repouso, por uma diferença de potencial V . Em seguida entram numa região onde existe um campo magnético uniforme, \vec{B} , perpendicular às respectivas velocidades, descrevendo trajectórias cujos raios estão na razão

$$R_1 : R_2 : R_3 = 1 : 2 : 3.$$

Determinar a relação entre as massas das partículas.

4. Mostrar que a energia de recuo de um electrão que está inicialmente em repouso e com o qual colide um fóton de momento h/λ é

$$T = \frac{hc}{\lambda} \frac{2 \left(\frac{h}{mc\lambda} \right) \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)}{1 + 2 \left(\frac{h}{mc\lambda} \right) \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)}.$$

(θ é o ângulo que a direcção de dispersão do fóton faz com a direcção de incidência e m é a massa do electrão.) Mostrar ainda que o fóton é dispersado com um novo comprimento de onda λ' dado por

$$\lambda' - \lambda = 2 \left(\frac{h}{mc} \right) \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right).$$

Esta variação do comprimento de onda é designada por desvio de Compton.

5. Um planeta orbita em torno de uma estrela de massa M numa trajectória circular de raio R . Se o planeta for ligeiramente perturbado segundo o eixo perpendicular ao plano da órbita começará a oscilar em torno da órbita inicial. Comparar o período destas oscilações com o período de translação.

II Electromagnetismo

1. Duas placas quadradas de lado ℓ carregadas com densidade superficial de carga $+\sigma$ e $-\sigma$ são colocadas paralelamente uma à outra, em $y = 0$ e $y = d$, respectivamente.

Considerar iões positivos de massa m e carga q que entram na região entre as placas, num ponto P equidistante destas ($y = d/2$), com velocidade $\vec{v} = v_0 \hat{x}$.

Nota: Considerar que $d \ll \ell$ e desprezar os efeitos da força gravítica.

- (a) Calcular o máximo valor que σ poderá ter para que os iões escapem da região entre as placas. Fazer um esboço da trajectória dos iões.
 - (b) Determinar o campo magnético \vec{B} que deve ser estabelecido na região entre as placas para que os iões sigam em trajectória rectilínea.
 - (c) Calcular a força por unidade de área que uma placa exerce sobre a outra.
2. Considerar uma bobina de comprimento ℓ , formada por N espiras circulares de raio a ($a \ll \ell$), uniformemente distribuídas. Aos terminais desta bobina, de indutância L e resistência desprezável, é aplicada uma tensão variável $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$, com V_0 e ω constantes.

Nota: a queda de tensão nos extremos de uma bobina de resistência desprezável é $L \frac{dI}{dt}$.

- (a) Tomando para eixo dos zz o eixo da bobina, mostrar que o campo magnético no interior desta pode ser descrito pela expressão $\vec{B}(t) \simeq B_0 \sin(\omega t) \hat{z}$. Determinar a expressão de B_0 .
- (b) Para avaliar a correcção da expressão de B_0 , colocou-se uma pequena bobina de comprimento $\ell' = \ell/4$, raio $a' = a/4$, e com a mesma densidade de espiras ($n' = n$), no interior da bobina maior, coaxial com esta, e mediu-se a amplitude, ε_0 , da força electromotriz induzida na bobina pequena. Obter a expressão que permite relacionar B_0 com ε_0 .
- (c) Se se deslocar a bobina pequena ao longo do eixo, posicionando-a próximo das extremidades da bobina maior, o valor de ε_0 que se mede deverá aumentar, diminuir ou manter-se? Justificar a resposta.

III Boomerang

O movimento de um boomerang pode ser estudado por analogia com um giroscópio. Embora a forma “clássica” de um boomerang seja uma “banana” (Fig. 1), este pode ter outras formas. Uma das formas possíveis é a representada na Fig. 2. Esta forma é bastante mais fácil de estudar que a forma clássica, e consiste simplesmente numa cruz formada por quatro lâminas iguais. Estas lâminas não são planas. O seu perfil é o de uma asa de avião, como se pode ver na Fig. 3. (Os boomerangs tradicionais têm um perfil semelhante.)

O boomerang é atirado como se mostra na Fig. 4, com a face curva das lâminas virada para o lado esquerdo do atirador. Quando sai da mão do atirador, o boomerang roda rapidamente em torno do seu centro de massa, que se desloca paralelamente ao solo. Devido à sua rotação, o boomerang possui um momento angular em relação ao seu centro de massa que, inicialmente, aponta para a esquerda do atirador.

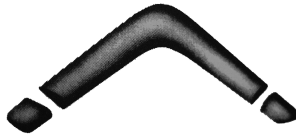


Figura 1: Boomerang tradicional.

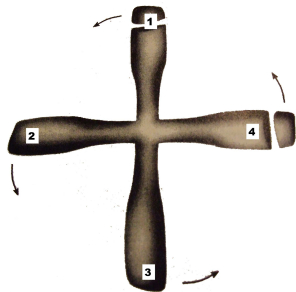


Figura 2: Boomerang de lâminas cruzadas.

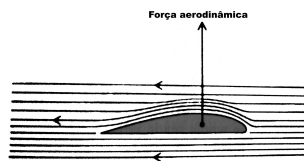


Figura 3: Perfil das lâminas de um boomerang.

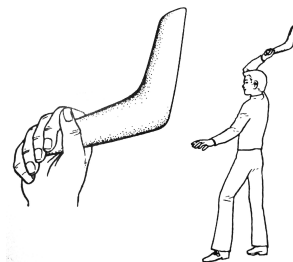


Figura 4: Lançamento de um boomerang.

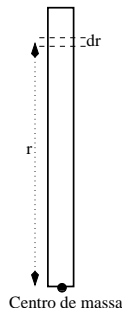


Figura 5: Lâmina do boomerang de lâminas cruzadas.

O segredo do movimento do boomerang está nas forças aerodinâmicas que se exercem sobre as lâminas devido ao seu perfil. Estas forças actuam perpendicularmente ao plano de rotação do boomerang, no sentido do momento angular. (Tal como na asa dum avião, a força aerodinâmica aponta no sentido da face plana para a face curva, pois a velocidade do ar que se escoia junto à face curva é superior à do ar que se escoia junto à face plana.) A força que se exerce sobre a lâmina superior é maior do que a que se exerce sobre a lâmina inferior porque as velocidades de rotação e translação se somam no primeiro caso enquanto no segundo caso se subtraem. Esta diferença nas forças sobre as lâminas resulta num momento de forças total não nulo, o que leva o momento angular a precessar, tal como num giroscópio. A combinação da precessão com a aceleração do centro de massa no plano perpendicular ao plano de rotação do boomerang leva o boomerang a descrever uma órbita circular, regressando à mão do seu atirador.

Neste problema ir-se-á estudar o movimento do boomerang da Fig. 2. Para simplificar este estudo, considere-se que o peso do boomerang e a resistência do ar são desprezáveis. (Com um boomerang real, basta incliná-lo ligeiramente em relação à vertical no momento do seu lançamento para contrabalançar o efeito destas forças.) A massa do boomerang é m e o atirador imprime-lhe no lançamento uma velocidade de translação do centro de massa V e uma velocidade de rotação ω em torno do centro de massa. As 4 lâminas podem ser consideradas barras de espessura desprezável e comprimento l . Assuma-se ainda que a força aerodinâmica sobre uma secção de uma lâmina é proporcional ao quadrado da velocidade tangencial dessa secção (ver Fig. 5):

$$dF = cv_t^2(r)dr.$$

(c é uma constante que depende da forma do boomerang e da densidade do ar.) A velocidade tangencial da lâmina é a componente da velocidade perpendicular à lâmina. A componente na direcção da lâmina, dita radial, não contribui para a força aerodinâmica. Reparar que há ainda uma componente da velocidade da lâmina que é perpendicular ao plano de rotação. Esta componente também não contribui para a força aerodinâmica.

1. Considerando apenas a lâmina 1 (Fig. 2) que, no instante de lançamento, se encontra alinhada com a vertical acima do centro de massa do boomerang, mostrar que, no instante t , a velocidade tangencial de um ponto da lâmina à distância r do centro de massa do boomerang é

$$v_{1t}(r, t) = \omega r + V \cos(\omega t).$$

2. Determinar a força total sobre esta lâmina.

3. Determinar, no instante t , o momento da força aerodinâmica sobre um ponto da lâmina 1 que se encontra à distância r do centro de massa.
4. Determinar o momento total da força aerodinâmica sobre a lâmina 1.
5. Mostrar que a força aerodinâmica total sobre o boomerang é

$$|F(t)| = \frac{4}{3}c\omega^2 l^3 + 2V^2 cl$$

e determinar a sua direcção e sentido.

6. Mostrar que o momento total da força aerodinâmica sobre o boomerang é

$$|M(t)| = \frac{4}{3}c\omega V l^3$$

e determinar a sua direcção e sentido.

7. Devido ao momento das forças aerodinâmicas, o momento angular do boomerang precessa, i.e., roda em torno de um dado eixo (tal como num giroscópio). Se o boomerang rodar muito rapidamente, o momento angular associado devido à precessão é desprezável e a frequência de precessão ω_p do boomerang é dada simplesmente pelo quociente entre o momento total das forças aerodinâmicas e o momento angular associado à rotação do boomerang. Mostrar que

$$\omega_p = \frac{4cVl}{m}.$$

8. Para que o boomerang regresse ao atirador, descrevendo uma órbita circular, a resultante das forças aerodinâmicas deve ser sempre dirigida para o centro da órbita. Determinar a relação entre a velocidade do centro de massa e a velocidade de rotação do boomerang em torno do centro de massa para que esta condição se verifique. Nessas condições, determinar também o raio da trajectória do boomerang.

NOTA:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$$

$$\int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$$