

Olimpíadas de Física 2005

Seleccção para as provas internacionais

Resolução da Prova Teórica

Sociedade Portuguesa de Física

20/Maio/2005

Resolução da Prova Teórica

Duração da prova: 4h

I Vários tópicos

1. O momento linear inicial é nulo, logo, o momento linear final também é nulo. Como as partículas são idênticas, da igualdade do módulo dos momentos lineares de cada partícula, $p'_1 = p'_2$ resulta a igualdade do módulo das suas velocidades.

Da conservação da energia

$$Mc^2 = \frac{2mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad (1)$$

obtemos

$$m = \frac{M}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}, \quad (2)$$

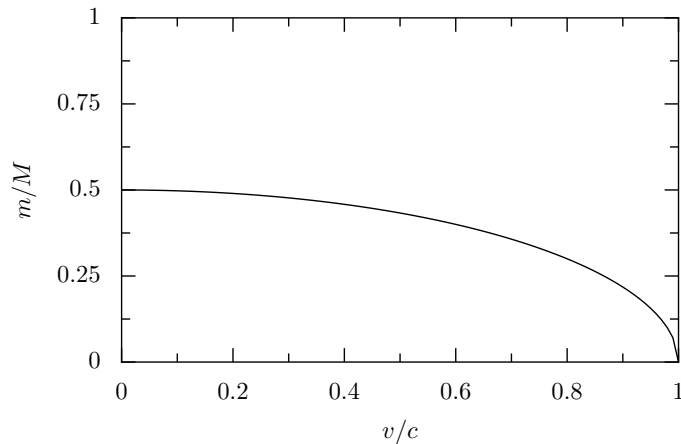


Figura 1: Gráfico da massa das partículas emitidas em função de $\beta = v/c$.

Quando as partículas são emitidas com a velocidade da luz, a sua massa é, evidentemente, nula. No regime não relativista, em que as partículas são emitidas com velocidade muito inferior à da luz, a massa de cada uma das partículas emitidas é metade da massa da partícula que decaiu.

2. A potência dissipada na resistência externa é $P = RI^2$. A corrente que percorre o circuito é $I = \epsilon/(R + r_i)$. Assim, a potência dissipada na resistência externa em função das características do circuito é

$$P = \epsilon^2 \frac{R}{(R + r_i)^2} \quad (3)$$

Quando a resistência externa é muito menor do que a resistência interna do gerador, a corrente tende para o valor $I = \epsilon/r_i$, mas como $R \simeq 0$, a potência dissipada na resistência externa tende para zero e toda a potência disponibilizada pelo gerador é dissipada no interior do próprio gerador. Quando a resistência externa é muito maior do que a resistência interna do gerador, a corrente no circuito tende para zero, pelo que a potência dissipada na resistência externa também tende para zero. A função $P(R)$ é contínua e terá um máximo para um valor intermédio da resistência que podemos determinar calculando o valor em que se anula a derivada da função $P(R)$:

$$\frac{dP}{dR} = \epsilon^2 \frac{r_i - R}{(R + r_i)^3}. \quad (4)$$

A derivada anula-se quando $R = r_i$, pelo que a potência dissipada na resistência externa do circuito é máxima quando esta iguala a resistência interna do gerador.

3. O fluxo de radiação entre as placas está representado na Fig. 2.

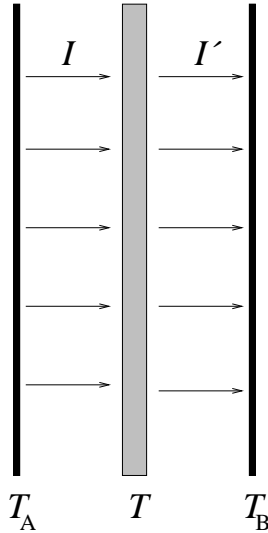


Figura 2: Fluxo de radiação entre as placas negras e o placa do meio.

A intensidade da radiação que flui da placa A para a placa do meio é

$$I = \sigma T_A^4 - \epsilon \sigma T^4 \quad (5)$$

Por outro lado a intensidade da radiação que flui da placa do meio para a placa B é

$$I' = \epsilon \sigma T^4 - \sigma T_B^4. \quad (6)$$

No equilíbrio, a intensidade da radiação recebida de A é igual à emitida para B, $I = I'$, vindo

$$2\epsilon T^4 = T_A^4 + T_B^4, \quad (7)$$

ou seja,

$$T = \sqrt[4]{\frac{T_A^4 + T_B^4}{2\epsilon}} \quad (8)$$

A intensidade da radiação transmitida é

$$I = \sigma T_A^4 - \epsilon \sigma \frac{T_A^4 + T_B^4}{2\epsilon}, \quad (9)$$

ou ainda, simplificando,

$$I = \sigma \frac{T_A^4 - T_B^4}{2}. \quad (10)$$

4. Quando o pistão se encontra na sua posição de equilíbrio, a equação de estado do gás é

$$P \frac{AL}{2} = nRT. \quad (11)$$

Quando há afastamento do pistão, as pressões de um e do outro lado do pistão são dadas pelas equações:

$$P_1 A \left(\frac{L}{2} + x \right) = nRT = P A \frac{L}{2}, \quad (12)$$

$$P_2 A \left(\frac{L}{2} - x \right) = nRT = P A \frac{L}{2}, \quad (13)$$

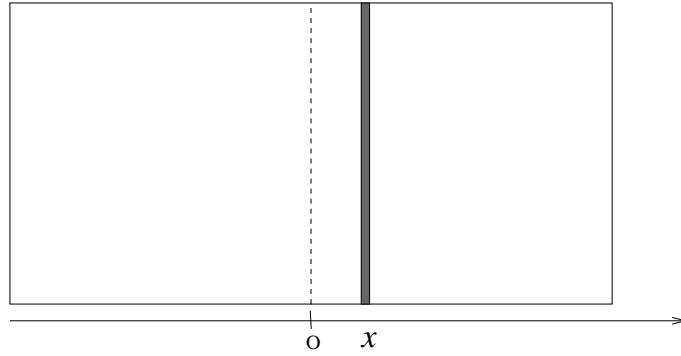


Figura 3: Tubo com o pistão ligeiramente deslocado da posição de equilíbrio, para a direita.

O gás do lado esquerdo exerce uma pressão

$$P_1 = P \frac{L/2}{L/2 + x}, \quad (14)$$

e o do lado direito

$$P_2 = P \frac{L/2}{L/2 - x}. \quad (15)$$

A força exercida sobre o pistão é restauradora, para a esquerda, quando $x > 0$ tal como na Fig. 3:

$$F = -(P_2 - P_1)A = PA \frac{L}{2} \left(\frac{1}{L/2 + x} - \frac{1}{L/2 - x} \right), \quad (16)$$

$$= \frac{PAL/2}{L/2} \left(\frac{1}{1 + \frac{2x}{L}} - \frac{1}{1 - \frac{2x}{L}} \right) \quad (17)$$

$$\simeq PA \left(1 - \frac{2x}{L} - 1 - \frac{2x}{L} \right) \quad (18)$$

$$= -\frac{4PA}{L}x \quad (19)$$

A força é do tipo elástico, $F = -kx$; a constante elástica k está relacionada com a frequência $\omega = 2\pi f$ do movimento oscilatório do pistão através da relação $k = m\omega^2$, pelo que

$$\omega = \sqrt{\frac{4PA}{Lm}}, \quad (20)$$

e

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4PA}{Lm}}. \quad (21)$$

5. A resultante das forças que actuam sobre o *Diplodocus* em equilíbrio é nula: $\vec{P} = \vec{I} + \vec{N}$. Como,

$$P = mg = 1,85 \times 10^5 \times 9,8 = 1,81 \times 10^6 \text{ N}, \quad (22)$$

e

$$I = 0,8\rho_\ell V_i g = 0,8 \times 10^3 \frac{1,85 \times 10^5}{0,9 \times 10^3} \times 9,8 = 1,62 \times 10^6 \text{ N}, \quad (23)$$

vem

$$N = P - I = 2,01 \times 10^5 \text{ N} \quad (24)$$

À profundidade média h referida, a pressão no interior dos pulmões do dinossauro seria,

$$P = P_0 + \rho gh, \quad (25)$$

ou seja,

$$\Delta P = P - P_0 = \rho_{\ell} g h = 10^3 \times 9,8 \times 8 \simeq 78 \times 10^3 \text{ Pa} \quad (26)$$

Como ΔP é muito superior a 8 kPa, a tese é inaceitável!

II Anel carregado e aquecimento de moedas

1. (a) O campo eléctrico criado por um elemento de carga $dq = \lambda d\ell$ do anel num ponto sobre o eixo do anel à distância r do elemento de carga é

$$|d\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \quad (27)$$

Por simetria, apenas a componente do campo segundo o eixo, E_z não é nula, e $dE_z = dE \cos \theta$. Como

$$\cos \theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \quad (28)$$

vem

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\ell}{z^2 + R^2} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \quad (29)$$

e, integrando sobre o anel,

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \times 2\pi R. \quad (30)$$

Como $\lambda = Q/2\pi R$, podemos então escrever

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{e}_z. \quad (31)$$

- (b) Como $z \ll R$ para a situação em causa, vamos reescrever a expressão de E_z na forma

$$E_z = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left[R^2 \left(1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2\right)\right]^{3/2}} \quad (32)$$

$$= \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 R^3} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (33)$$

Seja $u = (z/R)^2 \ll 1$ e façamos a expansão em série de Taylor de $\frac{1}{(1+u)^{3/2}}$:

$$\frac{1}{(1+u)^{3/2}} = (1+u)^{-3/2} = 1 + u \left[\left(-\frac{3}{2}\right) (1+u)^{-5/2} \right] + \dots \quad (34)$$

$$\simeq 1 - \frac{3}{2}u \quad (35)$$

Então,

$$E_z \simeq \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{z}{R}\right)^2 \right] \quad (36)$$

e, considerando apenas o termo dominante:

$$E_z \simeq \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} z. \quad (37)$$

A força que actua sobre a carga $-q$, para pequenos deslocamentos da posição de equilíbrio, é dada, nesta aproximação, pela expressão

$$F = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3} z. \quad (38)$$

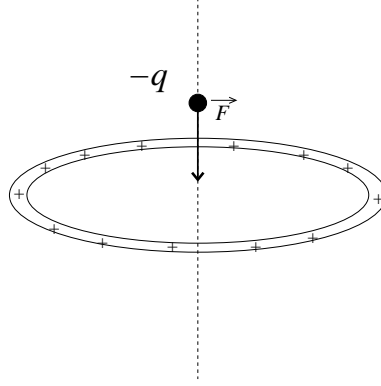


Figura 4: Força exercida pelo anel na carga $-q$.

É uma força do tipo elástico, $F = -kz$, com constante de força

$$k = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3}. \quad (39)$$

A frequência angular das oscilações é $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e o período das oscilações é

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 m R^3}{qQ}}. \quad (40)$$

2. (a) A grandeza do campo magnético criado na origem por cada um dos fios (Fig. 5) é igual e dada pela expressão

$$|\vec{B}_1| = |\vec{B}_2| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad r = \sqrt{h^2 + \frac{d^2}{4}} \quad (41)$$

A adição dos dois campos resulta num campo \vec{B} com a direcção do eixo dos yy cuja grandeza é

$$B = 2\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cos \theta, \quad \cos \theta = \frac{d/2}{r}. \quad (42)$$

Assim,

$$B = 2\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \times \frac{d/2}{r} = \frac{\mu_0 I d}{2\pi r^2}. \quad (43)$$

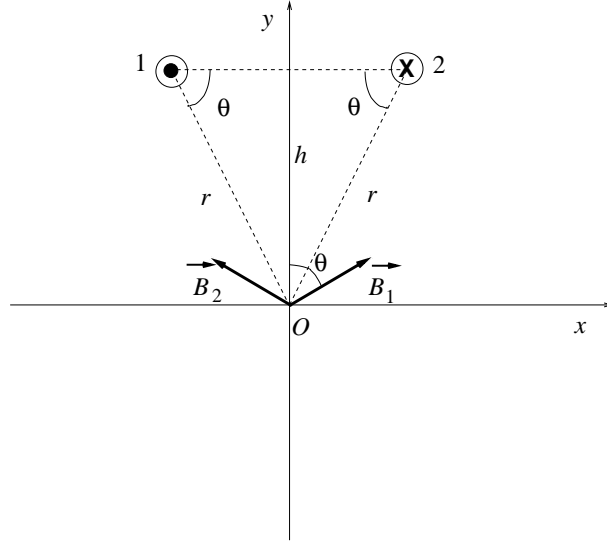


Figura 5: Campo magnético no ponto O .

Atendendo a que $I = I_0 \sin(\omega t)$ e à direcção do campo, podemos escrever

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0 \sin(\omega t) d}{2\pi \left(h^2 + \frac{d^2}{4}\right)} \hat{e}_y. \quad (44)$$

(b) Seja $\vec{B} = k \sin(\omega t) \hat{e}_y$, com

$$k = \frac{\mu_0 I_0 d}{2\pi \left(h^2 + \frac{d^2}{4}\right)}. \quad (45)$$

O campo eléctrico induzido no disco (moeda) de raio a , colocado na origem do referencial, obtém-se a partir da lei de Faraday da indução electromagnética. A força electromotriz induzida nos pontos à distância r do centro do disco é dada por

$$\epsilon_i = -\frac{d\phi}{dt} = -\omega k \pi r^2 \cos(\omega t). \quad (46)$$

Da relação entre o campo eléctrico induzido e a força electromotriz induzida,

$$\epsilon_i(r, t) = \oint \vec{E}_i(r, t) \cdot d\vec{\ell} = E_i(r, t) \times 2\pi r, \quad (47)$$

obtém-se

$$\vec{E}_i = -\frac{\omega k r}{2} \cos(\omega t) \hat{e}_\phi. \quad (48)$$

(c) A potência dissipada no disco é igual à potência fornecida pelo campo eléctrico induzido. Para cada anel percorrido pela corrente dI ,

$$dP = \epsilon_i(r, t) dI(r, t) \quad (49)$$

Como $dI = J dA = \sigma E dA$,

$$dI(r, t) = -\frac{\sigma\omega kr}{2} \cos(\omega t) b \, dr. \quad (50)$$

Assim,

$$dP(r, t) = (\omega k)^2 \frac{\pi\sigma b}{2} \cos^2(\omega t) r^3 \, dr \quad (51)$$

Integrando na coordenada r , obtemos

$$P(t) = (\omega k)^2 \frac{\pi\sigma b}{2} \cos^2(\omega t) \frac{a^4}{4}. \quad (52)$$

que é a expressão da potência instantânea. O valor *médio* da potência é

$$\bar{P}(t) = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) \, dt = \frac{1}{2} (\omega k)^2 \frac{\pi\sigma b}{2} \frac{a^4}{4} \quad (53)$$

$$= \frac{1}{16} (\omega k)^2 \pi\sigma b a^4. \quad (54)$$

Podíamos ter calculado a potência dissipada recorrendo à expressão

$$P = RI^2, \quad (55)$$

calculando a resistência dR de um elemento do anel que é percorrido pela corrente dI , e integrando para todo o anel.

III Futebol cúbico

- (a) Como a única força que actua sobre a bola na direcção horizontal é a “força do pontapé”, \vec{F} , a variação da quantidade de movimento da bola segundo essa direcção é

$$m\Delta v_x \equiv mv_x = F\Delta t, \quad (56)$$

visto que a bola se encontra inicialmente em repouso (m é a massa da bola e Δt é a duração do contacto do pé do jogador com a bola. Do mesmo modo, como $R \gg mg$, na direcção vertical

$$m\Delta v_y \equiv mv_y \simeq R\Delta t. \quad (57)$$

Então,

$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{R}{F}. \quad (58)$$

- (b) Designe-se o canto inferior direito da bola por C e suponha-se que este ponto tem liberdade para se mover. A velocidade do ponto C é facilmente obtida recordando que se pode analisar o movimento deste ponto como a composição de um movimento de translação (associado ao movimento do centro de massa da bola) com uma rotação em torno do centro de massa:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{\text{CM}} + \vec{\omega} \times \vec{r}_C, \quad (59)$$

em que \vec{v}_{CM} é a velocidade do centro de massa (cujas componentes foram calculadas na alínea anterior), $\vec{\omega}$ é a velocidade de rotação da bola em torno do seu

centro de massa imediatamente antes do ressalto e \vec{r}_C é o vector posição de C em relação ao centro de massa. Como, para um sistema de eixos convencional (*dextorsum*), o sentido positivo do eixo dos z aponta para cima da folha de papel, $\vec{\omega} = -\omega\hat{k}$ ($\omega > 0$). Então,

$$\vec{v}_C = (v_x\hat{i} + v_y\hat{j}) - \omega\hat{k} \times (\hat{l}i - \hat{l}j) = (v_x - \omega l)\hat{i} + (v_y - \omega l)\hat{j}. \quad (60)$$

- (c) Se o ponto C tivesse liberdade para se mover durante o pontapé, o seu movimento seria descendente enquanto a bola se comprimia e ascendente enquanto esta se descomprimia e ressaltava. Então, imediatamente antes do ressalto, a sua velocidade na vertical terá de ser nula. Da equação anterior conclui-se então que

$$v_y = \omega l. \quad (61)$$

- (d) Podemos facilmente calcular o momento angular adquirido pela bola recordando que

$$\Delta\vec{L} = \vec{M}\Delta t, \quad (62)$$

em que \vec{M} é a resultante dos momentos das forças aplicadas à bola. Então, como o momento angular inicial é nulo,

$$\vec{L} = (-\hat{l}i + \hat{l}j) \times (F\hat{i})\Delta t + (\hat{l}i - \hat{l}j) \times (R\hat{j})\Delta t = l(R - F)\Delta t\hat{k} \quad (63)$$

(em relação ao centro de massa da bola). Por outro lado,

$$\vec{L} = I\vec{\omega}, \quad (64)$$

se I for o momento de inércia da bola para rotação do eixo perpendicular a esta e que passa pelo seu centro de massa. Então, recorrendo a (57) e a (61), vem

$$I\omega = l(F - R)\Delta t \Leftrightarrow \quad (65)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}ml^2\omega = lF\Delta t - lmv_y \Leftrightarrow \quad (66)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}ml^2\omega = lF\Delta t - ml^2\omega \Leftrightarrow \quad (67)$$

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{3F\Delta t}{5ml}. \quad (68)$$

- (e) Após o ressalto, a velocidade do centro de massa muda por acção da força $e\vec{R}$. Então, sendo v'_y a componente vertical da velocidade da bola imediatamente após o ressalto,

$$mv'_y = mv_y + eR\Delta t \Leftrightarrow v'_y = v_y + e\frac{R\Delta t}{m} = v_y + ev_y = \frac{3F\Delta t}{5m}(1 + e). \quad (69)$$

- (f) Do mesmo modo que na alínea anterior, a velocidade de rotação da bola muda apenas por acção da força $e\vec{R}$. Então, sendo ω' a nova velocidade de rotação,

$$I\omega' = I\omega - eR\Delta t \Leftrightarrow \quad (70)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}ml^2\omega' = \frac{2}{3}ml^2\omega - eml^2\omega \Leftrightarrow \quad (71)$$

$$\Leftrightarrow \omega' = \omega \left(1 - \frac{3e}{2}\right) = \frac{3F\Delta t}{5ml} \left(1 - \frac{3e}{2}\right). \quad (72)$$

Se $e = 2/3$, conclui-se que $\omega' = 0$.