

Resolução da Prova Teórica

Duração da prova: 4h

I Vários tópicos

1. Se a massa da Terra estiver uniformemente distribuída, a massa contida numa esfera de raio r ($r \leq R$, em que R é o raio da Terra) é

$$M(r) = \rho \frac{4}{3} \pi r^3, \quad (1)$$

em que ρ é a densidade da Terra. A lei de Gauss para o campo gravítico $\vec{\mathcal{G}}$ é

$$\oint_S \vec{\mathcal{G}} \cdot \hat{n} dS = -4\pi G M \quad (2)$$

(G é a constante de gravitação universal e M é a massa contida dentro da região delimitada pela superfície S). Como o campo é radial e só depende da distância ao centro da Terra:

$$\oint_S \vec{\mathcal{G}} \cdot \hat{n} dS = \mathcal{G}(r) 4\pi r^2. \quad (3)$$

Então

$$\mathcal{G}(r) 4\pi r^2 = -4\pi G M(r) = -4\pi G \rho \frac{4}{3} \pi r^3, \quad (4)$$

isto é,

$$\mathcal{G}(r) = -\frac{4\pi\rho G}{3} r. \quad (5)$$

Como o túnel é estreito, a sua existência não modifica o campo gravítico. Assim, dado que a força sobre o corpo de massa m quando este cai através do túnel é $\vec{F} = m\vec{\mathcal{G}}$, a equação de movimento é

$$-\frac{4\pi\rho G m}{3} r = m \frac{d^2 r}{dt^2}, \quad (6)$$

que é a equação de um oscilador harmónico de período

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4\pi\rho G}{3}}} = \sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}}. \quad (7)$$

A viagem de um lado ao outro da Terra corresponde a meio período, logo a sua duração é

$$\Delta t = \frac{T}{2} = 2530 \text{ s} \sim 42 \text{ min}. \quad (8)$$

2. Para o próton descrever uma órbita circular com velocidade constante em módulo a força de Lorentz ($\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$) só pode ter componente centrípeta. Isto significa que o

campo magnético tem de ser perpendicular ao plano da órbita e, portanto, o módulo de \vec{F} é $F = qvB$. Então, a condição para uma órbita circular de raio r é

$$qvB = m \frac{v^2}{r}. \quad (9)$$

A força centrípeta relativista é

$$F_c = \frac{\gamma m v^2}{r}, \quad (10)$$

logo o raio da órbita é

$$r = \frac{\gamma m v}{qB}. \quad (11)$$

Um próton de 8 TeV tem quantidade de movimento

$$p = \gamma m v = \sqrt{\left(\frac{E}{c}\right)^2 - (mc)^2} \simeq 8 \text{ TeV}/c, \quad (12)$$

logo o raio da órbita “relativista” é:

$$r = \frac{p}{qB} = \frac{8 \times 10^{12} \times 1,6 \times 10^{-19} / 3 \times 10^8}{1,6 \times 10^{-19} \times 9} = 2,96 \times 10^3 \text{ m}. \quad (13)$$

O resultado não relativista, dado que a força centrípeta é

$$F_c = \frac{m v^2}{r} \quad (14)$$

e a quantidade de movimento do próton é

$$p = m v = \sqrt{2mE}, \quad (15)$$

é

$$r = \frac{\sqrt{2mE}}{qB} = \frac{\sqrt{2 \times 1,67 \times 10^{-27} \times 8 \times 10^{12} \times 1,6 \times 10^{-19}}}{1,6 \times 10^{-19} \times 9} = 45,4 \text{ m}. \quad (16)$$

O túnel “relativista” terá um perímetro de 18,6 km, enquanto o perímetro do túnel não-relativista será apenas 285 m. A relatividade sai cara na construção de aceleradores ...

3. No interior da Mir a velocidade do ar é nula e a pressão atmosférica pode ser obtida por

$$P = \frac{nRT}{V} = \frac{nN_A k_B T}{V} = k_B T \frac{N_{\text{moléculas}}}{V} = k_B T \frac{\rho}{m}, \quad (17)$$

em que n é o número de moles de ar, V o volume que estas ocupam à temperatura T , ρ é a densidade do ar e m é a massa molecular média do ar. No exterior da Mir a pressão é nula; aplicando a equação de Bernoulli

$$P + \frac{1}{2}\rho \times 0^2 = 0 + \frac{1}{2}\rho v^2, \quad (18)$$

em que v é a velocidade de saída do ar através do buraco, obtemos

$$v = \sqrt{\frac{2P}{\rho}} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}. \quad (19)$$

A massa de ar perdida por unidade de tempo por um orifício de área A é

$$\frac{dM}{dt} = -\rho v A = -\rho A \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} = -\frac{M}{V} A \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} = -\lambda M, \quad (20)$$

onde M é a massa total de ar no interior da Mir, V é o volume que esta massa ocupa (o volume interior da Mir) e $\lambda = A \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}/V$. Esta equação é semelhante à equação para o decaimento radioactivo, logo a sua solução é

$$M = M_0 e^{-\lambda t} \quad (21)$$

(M_0 é a massa inicial de ar). Como $P = k_B T \rho / m = k_B T M / (m V)$, a pressão no interior varia de acordo com a mesma lei:

$$P = P_0 e^{-\lambda t}. \quad (22)$$

Em 8 minutos a pressão no interior desceu de 750 mmHg para 675 mmHg, logo

$$675 = 750 e^{-\lambda(8 \times 60)} \implies \lambda = \ln\left(\frac{750}{675}\right) \frac{1}{8 \times 60} = 2,195 \times 10^{-4}. \quad (23)$$

Então,

$$A = \lambda V \sqrt{\frac{m}{2k_B T}} \quad (24)$$

$$= 2,195 \times 10^{-4} \times 390 \times \sqrt{\frac{29 \times 1,66 \times 10^{-27}}{2 \times 1,38 \times 10^{-23} \times 297}} \quad (25)$$

$$= 1,96 \times 10^{-4} \text{ m}^2. \quad (26)$$

4. A força gravítica entre o Sol e a Terra só tem componente centrípeta, logo

$$G \frac{mM}{r^2} = mr\omega^2 = mr \frac{4\pi^2}{T^2}, \quad (27)$$

em que m e M são a massa da Terra e do Sol, respectivamente, r é a distância média entre o Sol e a Terra, ω é a velocidade angular, T é o período da órbita e G é a constante de gravitação universal. Sendo ρ a densidade média do Sol, $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$, em que R é o raio do Sol. Então

$$G \frac{4\pi R^3 \rho}{3r^2} = r \frac{4\pi^2}{T^2} \implies T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho} \left(\frac{r}{R}\right)^3}. \quad (28)$$

Como o período só depende da razão entre o raio médio da órbita e o raio do Sol e da densidade média do Sol, nenhuma alteração de escala de distâncias leva a variação do período.

5. Em qualquer instante a força exercida sobre a partícula é:

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right). \quad (29)$$

Decompondo esta equação nas componentes escalares,

$$\begin{cases} F_x = qv_y B_z \\ F_y = -qv_x B_z \\ F_z = qE_z \end{cases} \quad (30)$$

Aplicando a lei fundamental da dinâmica, e fazendo $B_z = B$ e $E_z = E$,

$$qv_y B = m \frac{dv_x}{dt} \quad (31)$$

$$-qv_x B = m \frac{dv_y}{dt} \quad (32)$$

$$qE = m \frac{dv_z}{dt} \quad (33)$$

Da eq. 33,

$$(34)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{qE}{m}, \quad (35)$$

e integrando esta equação,

$$v_z(t) - \underbrace{v_z(0)}_{=0} = \frac{qE}{m}t \Rightarrow v_z(t) = \frac{qE}{m}t \quad (36)$$

Derivando a eq. 31 e usando em 32,

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{m}{qB} \frac{d^2v_x}{dt^2} \iff \quad (37)$$

$$-qv_x B = \frac{m^2}{qB} \frac{d^2v_x}{dt^2} \iff \quad (38)$$

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} + \frac{(qB)^2}{m^2}v_x = 0 \quad (39)$$

Esta é a equação de um movimento harmónico simples cuja solução geral é

$$v_x(t) = A \cos(\omega t + \alpha), \quad (40)$$

onde $\omega = \frac{qB}{m}$.

Inserindo a solução para $v_x(t)$ na eq. 31, obtemos

$$qv_y(t)B = m(-\omega A) \sin(\omega t + \alpha) \iff \quad (41)$$

$$v_y(t) = -\frac{m}{qB} \omega A \sin(\omega t + \alpha) = -A \sin(\omega t + \alpha) \quad (42)$$

Resumindo, as equações paramétricas do movimento são:

$$\begin{cases} v_x(t) = A \cos(\omega t + \alpha) \\ v_y(t) = -A \sin(\omega t + \alpha) \end{cases} \quad (43)$$

No instante $t = 0$, $v_x(t = 0) = v_0$ e $v_y(t = 0) = 0$, ou seja, $A \cos \alpha = v_0$ e $A \sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ e $A = v_0$.

Concluindo:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos(\omega t) \\ v_y(t) = -v_0 \sin(\omega t) \\ v_z(t) = \frac{qE}{m}t \end{cases} \quad (44)$$

Trata-se da composição de um movimento circular no plano xy com um movimento uniformemente acelerado na direcção do eixo OZ .

Se a velocidade inicial da partícula for paralela a OZ é fácil concluir que, nestas condições, a velocidade apenas terá a componente $v_z(t) = v_0 + \frac{qE}{m}t$; o movimento é rectilíneo e uniformemente acelerado na direcção do eixo OZ .

II Campos eléctricos e magnéticos

1. (a) Seja $I_1(t)$ a corrente no solenóide interior e $I_2(t)$ a corrente no solenóide exterior

$$\begin{cases} I_1(t) = 2kt \\ I_2(t) = kt \end{cases} \quad (45)$$

Pelo princípio da sobreposição, o campo \vec{B}_a no interior do solenóide de raio R é:

$$B_a(t) = \mu_0 n I_1(t) + \mu_0 n I_2(t) = \mu_0 n \times 2kt + \mu_0 n \times kt = 3\mu_0 nkt, \quad (46)$$

onde n é o número de espiras do solenóide. Este campo é coaxial com os solenóides e aponta para trás do plano da fig. 1. Na região compreendida entre R e $2R$, o campo é apenas o criado pelo solenóide exterior:

$$B_b(t) = \mu_0 n I_2(t), \quad (47)$$

e tem a mesma direcção e sentido de \vec{B}_a .

- (b) O campo eléctrico induzido, à distância r do eixo (posição onde se encontra a partícula carregada) é devido às variações de fluxo magnético através da superfície que se apoia na circunferência de raio r ; aplicando a lei de Faraday:

$$\oint \vec{E}_i \cdot \hat{t} dl = -\frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt}. \quad (48)$$

O fluxo magnético é:

$$\Phi_{\text{mag}} = 3\mu_0 nkt \times \pi R^2 + \mu_0 nkt \times (\pi r^2 - \pi R^2) = \mu_0 nk\pi (2R^2 + r^2) t. \quad (49)$$

Assim,

$$E_i(r, t) \times 2\pi r = -\mu_0 nk\pi (2R^2 + r^2), \quad (50)$$

$$E_i(r, t) = -\frac{\mu_0 nk}{2r} (2R^2 + r^2). \quad (51)$$

- (c) A força eléctrica sobre a carga coloca-a em movimento; como é uma força constante, o movimento é uniformemente acelerado segundo a tangente à trajectória,

$$F = qE = ma_t = m \frac{dv}{dt}. \quad (52)$$

Por outro lado, a força magnética é responsável pela trajectória circular:

$$\frac{mv^2}{r} = qvB \Leftrightarrow v(t) = \frac{qr}{m} \mu_0 n k t \quad (53)$$

Assim,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{qr}{m} \mu_0 n k \quad (54)$$

Substituindo na eq. 52,

$$q \times \frac{\mu_0 n k}{2r} (2R^2 + r^2) = m \frac{qr}{m} \mu_0 n k, \quad (55)$$

ou seja,

$$2R^2 + r^2 = 2r^2 \Rightarrow r = \sqrt{2}R \quad (56)$$

III Mecânica

1. (a) Enquanto o lápis não desliza, o seu movimento é um movimento de rotação em torno da ponta. A velocidade angular deste movimento pode-se obter a partir da conservação da energia (como o lápis não desliza não há dissipação de energia).

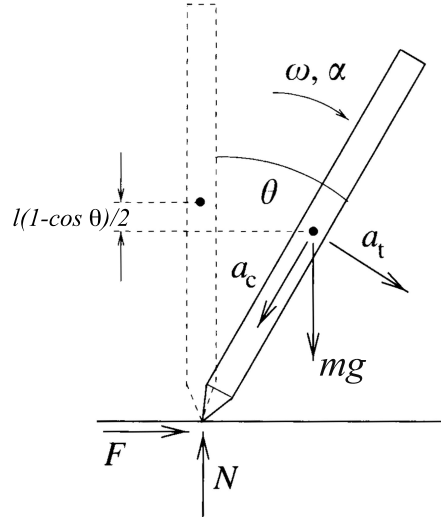


Figura 1: Diagrama de forças que actuam sobre o lápis.

A energia potencial quando o lápis está inclinado de um ângulo θ em relação à vertical (fig. 1) é:

$$E_p = mg \frac{l}{2} (1 - \cos \theta) \quad (57)$$

e a energia cinética é:

$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (58)$$

em que ω é a velocidade angular e I é o momento de inércia do lápis em relação a um eixo que passa pela sua ponta. Este momento de inércia pode-se calcular usando o teorema de Steiner, sendo dado por:

$$I = \frac{1}{12} m l^2 + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} m l^2. \quad (59)$$

A velocidade de rotação na fase inicial do movimento é então

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l} (1 - \cos \theta)}. \quad (60)$$

Para obter a aceleração angular α , basta reparar que o momento total das forças que actuam sobre o lápis, calculado em relação ao ponto de contacto do lápis com a mesa, é $mg \frac{l}{2} \sin \theta$, logo

$$I \alpha = mg \frac{l}{2} \sin \theta \iff \alpha = \frac{mgl \sin \theta}{2I} = \frac{3g \sin \theta}{2l}. \quad (61)$$

- (b) A soma “vectorial” da normal com o peso do lápis é igual à massa do lápis multiplicada pela componente vertical da aceleração. A componente vertical da aceleração tangencial é simplesmente $\frac{l}{2} \alpha \sin \theta$ e a componente vertical da aceleração centrípeta é $\frac{l}{2} \omega^2 \cos \theta$. Então,

$$mg - N = m \left(\frac{l}{2} \alpha \sin \theta + \frac{l}{2} \omega^2 \cos \theta \right) \quad (62)$$

$$= m \left(\frac{l}{2} \frac{3g \sin \theta}{2l} \sin \theta + \frac{l}{2} \frac{3g}{l} (1 - \cos \theta) \cos \theta \right), \quad (63)$$

donde se conclui que

$$N = \frac{3mg}{2} \left(\cos^2 \theta - \cos \theta - \frac{\sin^2 \theta}{2} \right) + mg \quad (64)$$

$$= \frac{3mg}{4} \left(2 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta - (1 - \cos^2 \theta) + \frac{4}{3} \right) \quad (65)$$

$$= \frac{mg}{4} (9 \cos^2 \theta - 6 \cos \theta + 1), \quad (66)$$

isto é,

$$N = mg \left(\frac{3 \cos \theta - 1}{2} \right)^2. \quad (67)$$

- (c) A força normal é sempre não-negativa e anula-se quando $\cos \theta = \frac{1}{3}$. Como a força de atrito é proporcional à força normal, se o lápis ainda não tiver escorregado quando fica inclinado de $70,5^\circ$ ($\arccos \frac{1}{3}$), escorregará de certeza quando chegar a essa inclinação.

- (d) Para determinar a força de atrito é preciso simplesmente determinar a componente horizontal da aceleração. De modo semelhante à alínea anterior basta somar as componentes horizontais da aceleração centrípeta e tangencial:

$$a_x = \frac{l}{2}\alpha \cos \theta - \frac{l}{2}\omega^2 \sin \theta \quad (68)$$

$$= \frac{l}{2} \left(\frac{3g \sin \theta}{2l} \cos \theta - \frac{3g}{l} (1 - \cos \theta) \sin \theta \right) \quad (69)$$

$$= \frac{3g}{4} \sin \theta (3 \cos \theta - 2) . \quad (70)$$

A condição para haver deslizamento do lápis é:

$$|ma_x| > \mu N , \quad (71)$$

logo

$$\mu < \frac{|3 \sin \theta (3 \cos \theta - 2)|}{(3 \cos \theta - 1)^2} . \quad (72)$$

Para determinar o sentido do deslizamento é preciso saber o sinal de a_x : se for positivo, a força de atrito aponta no mesmo sentido que a componente horizontal da aceleração tangencial do centro de massa do lápis. O deslizamento dá-se no então no sentido contrário, o que significa que a_x positivo indica que o lápis desliza para o lado oposto ao da sua queda. Ora, a_x é positivo sempre que $\cos \theta > \frac{2}{3}$, isto é, para inclinações inferiores a 48° . Mas só há deslizamento se se verificar a condição (72)...

- (e) Designe-se o lado direito da inequação 72 por $f(\theta)$, isto é,

$$f(\theta) = \frac{|3 \sin \theta (3 \cos \theta - 2)|}{(3 \cos \theta - 1)^2} . \quad (73)$$

Para ângulos inferiores a 48° , esta função pode-se escrever

$$f(\theta) = \frac{3 \sin \theta (3 \cos \theta - 2)}{(3 \cos \theta - 1)^2} , \quad (74)$$

e tem um máximo para $\theta \simeq 35^\circ$, como se pode verificar por inspecção:

θ	$f(\theta)$
33°	0.366847
34°	0.369509
35°	0.370571
36°	0.369778
37°	0.366830

Ao valor máximo desta função corresponde um coeficiente de atrito estático $\mu_{\text{crit}} = 0,37$, o que significa que para $\mu < 0,37$ o deslizamento se dá no sentido oposto ao da queda, e para $\mu > 0,37$ o deslizamento se dá no sentido da queda. O ângulo para o qual ocorre o deslizamento é determinado pela condição (72). A função $f(\theta)$ está representada na fig. 2. Da análise do gráfico conclui-se ainda que, qualquer que seja o coeficiente de atrito, o lápis não deslizará nunca quando a sua inclinação estiver entre 35° e 51° , visto que, nessa região, $\mu < 0,37$, o que implica que o lápis já teria deslizado...

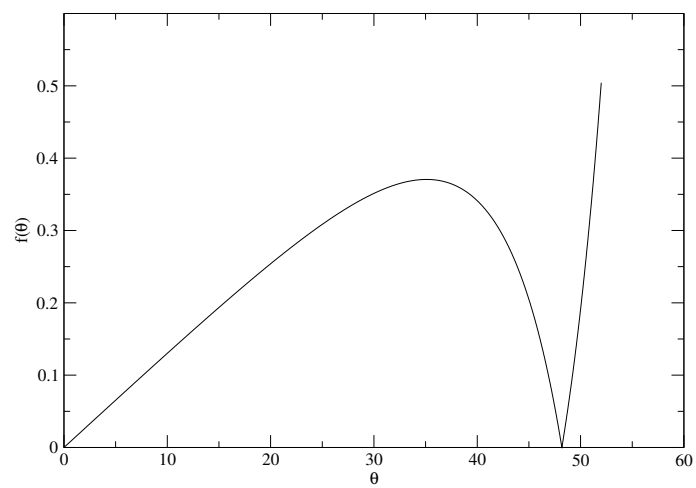


Figura 2: Gráfico da função $f(\theta)$.