

Resolução da Prova Experimental A

## Pêndulo de grande amplitude

### 1 Resolução

1. Os valores medidos do período em função da amplitude de oscilação estão coligidos na tab. 1. Para cada ângulo foram medidos 5 valores e efectuada a média. A dispersão dos valores é estimada em 0.01 s.

$\alpha(^{\circ})$	$T(\text{s})$
10	1.147
20	1.154
30	1.166
40	1.181
50	1.202
60	1.230
70	1.263
80	1.304
90	1.351
100	1.407
110	1.475
120	1.560

2. O gráfico  $T(\alpha)$  é o seguinte:
3. O momento resultante das forças aplicadas na régua em relação ao ponto de suspensão é

$$M_A = -mgl \sin \alpha \quad (1)$$

Se  $I_A$  é o momento de inércia da régua em relação ao ponto de suspensão,

$$M_A = I_A \frac{d^2 \alpha}{dt^2}, \quad (2)$$

de onde se conclui que

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{mgl \sin \alpha}{I_A} = 0 \quad (3)$$

Para pequenas oscilações podemos considerar  $\sin \alpha \sim \alpha$ , e a equação assume a forma

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -k\alpha, \quad (4)$$

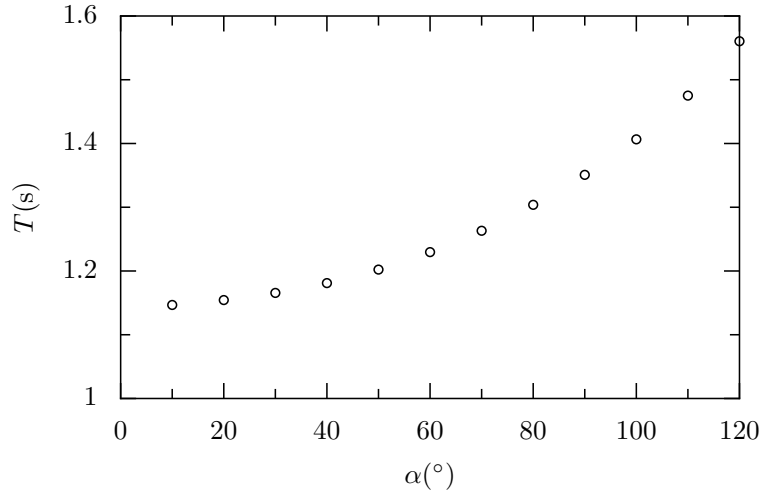


Figura 1:

com  $k = mgl/I_A$ . Trata-se da equação de um MHS em que

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{k}, \quad (5)$$

de onde se conclui que

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_A}{mgl}} \quad (6)$$

Usando a expressão dada para o momento de inércia para uma rotação em torno do centro de massa e aplicando o Teorema de Steiner,  $I_A = I_{CM} + ml^2$ , podemos escrever

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m\left(\frac{a^2+b^2}{12}\right) + ml^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}C}, \quad (7)$$

onde  $C = 1 + \frac{a^2+b^2}{12l^2}$ . Assim,

$$g = C\frac{4\pi^2l}{T_0^2} \quad (8)$$

Substituindo os valores numéricos,  $a = 0,043$  m,  $b = 0,506$  m,  $l = 0,228$  m, obtemos  $g = 11,0 \pm 0,5$  ms<sup>-2</sup>, que é um valor que excede o esperado ( $g = 9,8$  ms<sup>-2</sup>) para além da incerteza experimental. Contudo, a régua utilizada tem um formato em bisel (menor espessura do lado da escala) pelo que a expressão utilizada para o momento de inércia apenas permite uma estimativa aproximada do verdadeiro momento de inércia da régua, o que justifica o resultado obtido.

#### 4. Aplicando logaritmos à equação

$$T = T_0 \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^{-\gamma} \quad (9)$$

obtemos a seguinte relação linear entre  $T$  e  $x = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ :

$$\ln T = \ln T_0 - \gamma \ln x \quad (10)$$

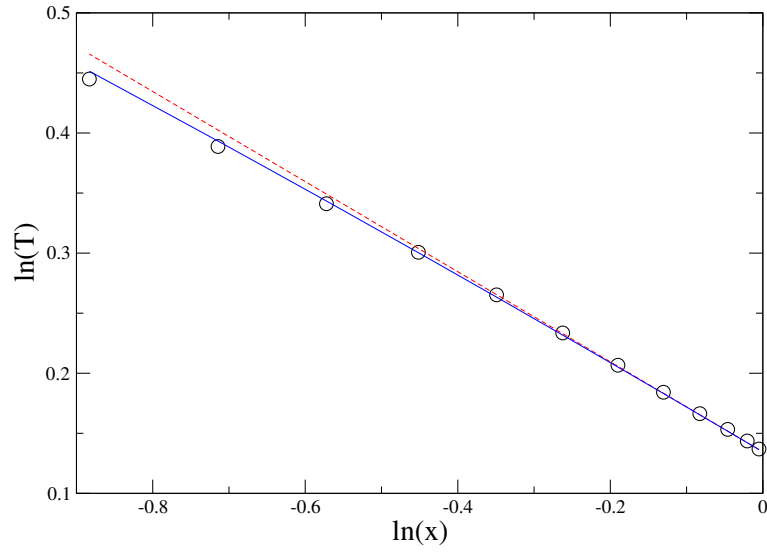


Figura 2: A tracejado a lei  $T = T_0 \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^{-0.371}$ ; a linha a cheio mostra a solução exacta obtida por integração numérica da equação do movimento.

Representando graficamente  $\ln T$  em função de  $\ln x$  obteremos uma recta de declive  $\gamma$  e ordenada na origem  $T_0$ . Este gráfico está representado na fig. 1. Verifica-se que a função proposta reproduz bem os dados experimentais para ângulos até  $\sim 90^\circ$ , mas existe um desvio pequeno, mas significativo para ângulos superiores. O ajuste linear incluindo os dados de  $\alpha < 90^\circ$  dá para o declive da recta o valor  $\gamma = 0.371(1)$ , o que está em bom acordo com o valor teórico  $m = -3/8$ , obtido a partir de uma expansão em série da solução exacta. A figura mostra ainda a solução exacta obtida por integração numérica da equação do movimento que segue de perto os dados experimentais.

Resolução da Prova Experimental B

## A capacidade desconhecida

### 1 Resolução

1. Foram medidos pares de valores  $V(R)$ , a partir dos quais se calculou a potência média dissipada na resistência,  $P_m = v_{\text{ef}}^2/R$ :

$R(\Omega)$	$v_{\text{ef}}(\text{V})$	$P(10^{-4}\text{W})$
217	0.200	1,843
560	0.486	4,218
777	0.636	5,206
1200	0.880	6,453
1420	0.972	6,653
1760	1.088	6,726
2200	1.198	6,524
2760	1.276	5,900
3300	1.338	5,425
4650	1.412	4,288
5500	1.434	3,739
7950	1.457	2,670

2. O gráfico  $P(R)$  é o seguinte:

O valor de  $R$  que maximiza a potência dissipada é  $R_{\text{max}} = 1760 \pm 170 \Omega$ .

3. Em cada instante, a soma da queda de tensão aos terminais do condensador e da resistência é igual à tensão do gerador:

$$v(t) = v_c(t) + v_R(t) = \frac{q(t)}{C} + Ri(t) \quad (11)$$

Derivando ambos os membros desta equação,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} + R \frac{di}{dt} = \frac{1}{C} i(t) + R \frac{di}{dt} \quad (12)$$

Substituindo nesta equação  $v(t) = v_0 \sin(\omega t)$  e  $i(t) = i_0 \sin(\omega t - \alpha)$ , obtém-se a equação:

$$\omega v_0 \cos(\omega t) = \frac{i_0}{C} \sin(\omega t - \alpha) + R \omega i_0 \cos(\omega t - \alpha) \quad (13)$$

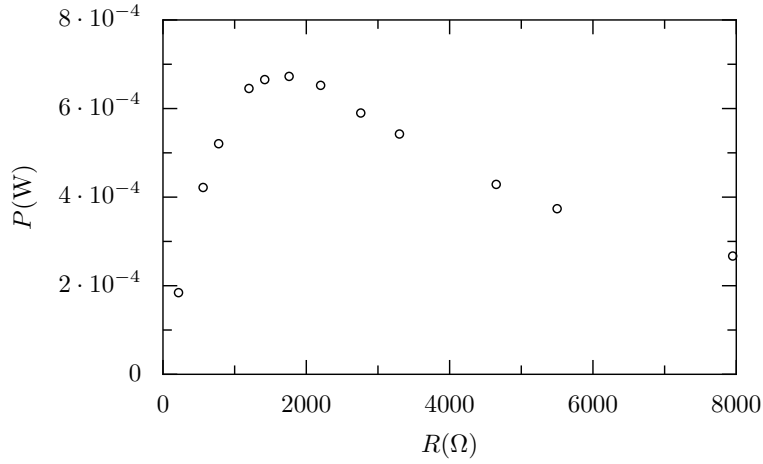


Figura 1:

Usando as relações trigonométricas

$$\sin(\omega t - \alpha) = \sin(\omega t) \cos \alpha + \cos(\omega t) \sin \alpha \quad (14)$$

$$\cos(\omega t - \alpha) = \cos(\omega t) \cos \alpha - \sin(\omega t) \sin \alpha, \quad (15)$$

obtemos

$$\omega v_0 \cos(\omega t) = \cos(\omega t) \left( \frac{i_0}{C} \sin \alpha + R \omega i_0 \cos \alpha \right) + \sin(\omega t) \left( \frac{i_0}{C} \cos \alpha - R \omega i_0 \sin \alpha \right). \quad (16)$$

Para que esta equação seja válida para qualquer instante  $t$  é necessário que

$$\omega v_0 = \frac{i_0}{C} \sin \alpha + R \omega i_0 \cos \alpha \quad (17)$$

e que

$$\frac{i_0}{C} \cos \alpha - R \omega i_0 \sin \alpha = 0 \quad (18)$$

Desda última equação concluímos de imediato que

$$\tan \alpha = \frac{1}{R \omega C} = \frac{Z_c}{R}. \quad (19)$$

Pegando na equação 17, dividindo ambos os membros por  $\omega \cos \alpha$  e utilizando a equação 19, obtemos

$$\frac{v_0}{\cos \alpha} = \frac{i_0}{\omega C} \tan \alpha + R i_0 = i_0 R \left( \left( \frac{Z_c}{R} \right)^2 + 1 \right). \quad (20)$$

Da 19, obtemos usando a relação trigonométrica  $\tan^2 \alpha + 1 = 1/\cos^2 \alpha$ ,

$$\cos \alpha = \frac{R}{Z_c^2 + R^2} \quad (21)$$

e da equação 20 conclui-se finalmente que

$$i_0 = \frac{v_0}{\sqrt{Z_c^2 + R^2}} \quad (22)$$

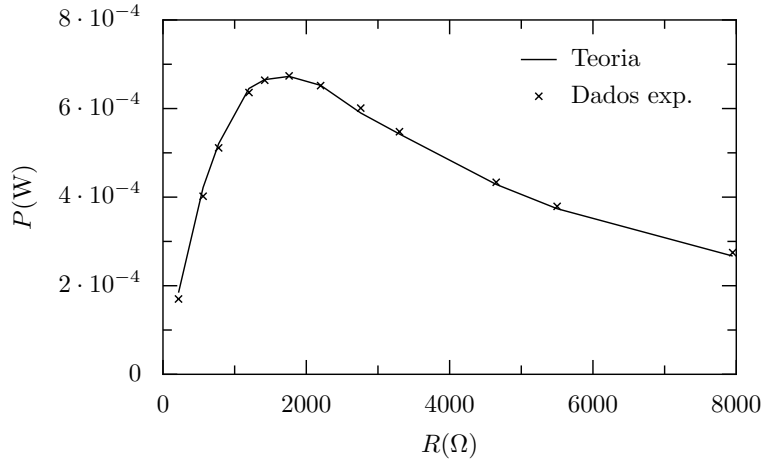


Figura 2:

4. Da expressão 19,  $\alpha = 0$  para um circuito só com uma resistência e  $\alpha = \pi/2$  para um circuito só com um condensador. Assim concluímos que a tensão e a intensidade aos terminais de um condensador estão em quadratura de fase pelo que a potência dissipada no condensador é zero. A potência média dissipada na resistência,  $P_m^R$  é idêntica à potência média dissipada no circuito,  $P_m$ . De facto,

$$P_m^R = \frac{1}{2} v_R i_0 = \frac{1}{2} R i_0^2 = \frac{1}{2} v_0^2 \frac{R}{Z_c^2 + R^2}, \quad (23)$$

que é idêntico a

$$P_m = \frac{1}{2} v_0 i_0 \cos \alpha = \frac{1}{2} v_0 \frac{v_0}{\sqrt{Z_c^2 + R^2}} \frac{R}{\sqrt{Z_c^2 + R^2}} = \frac{1}{2} v_0^2 \frac{R}{Z_c^2 + R^2}. \quad (24)$$

5. Quando a potência média dissipada na resistência é máxima,  $\frac{dP}{dR} = 0$ , ou seja

$$\frac{dP}{dR} = 0 = \frac{1}{2} v_0^2 \left( \frac{Z_c^2 - R^2}{(Z_c^2 + R^2)^2} \right) = 0. \quad (25)$$

Conclui-se que a potência é máxima quando

$$R = Z_c = \frac{1}{\omega C} \quad (26)$$

Assim,  $C = \frac{1}{\omega R_{\max}} = 0,45 \pm (4) \times 10^{-6} \text{F}$ . Para o cálculo da incerteza considerou-se  $\frac{\Delta C}{C} \sim \frac{\Delta R}{R}$ , uma vez que o erro no valor da resistência máxima é muito superior ao da incerteza na frequência do sinal.

O gráfico seguinte mostra a curva teórica  $P_{\max}(R)$  sobreposta aos dados experimentais, vendo-se que o acordo da teoria com a experiência é excelente.