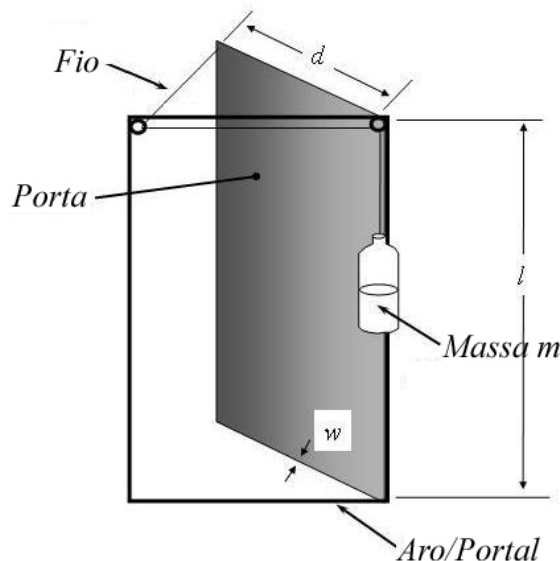


## Instruções

1. A prova é individual.
2. O tempo disponível é 5 horas.
3. Utilizar somente a caneta e demais materiais fornecidos, que devem ser devolvidos dentro do envelope da prova.
4. Escrever claramente o seu nome, apelido/sobrenome e país no quadro abaixo.
5. NÃO escrever os dados anteriores nem qualquer outra marca de identificação nas restantes folhas.
6. Escrever nos quadros da folha de respostas somente a resposta à alínea correspondente. Incluir no quadro, além da expressão analítica, o resultado numérico, caso este seja pedido, indicando as unidades apropriadas.
7. Recordar, ao terminar, que deve preencher o quadro correspondente ao número de folhas de resposta adicionais para cada problema.
8. Se precisar de sair temporariamente da sala para ir à “casa de banho”/banheiro, por exemplo, faça-o saber a um dos professores presentes no local de exame.
9. Quando terminar, organize todas as folhas de maneira lógica, e coloque-as sobre as do enunciado. Não é permitido levar consigo qualquer papel do recinto da prova.

Apelidos/Sobrenomes:	
Nomes:	
País:	

## 1. Sistema gravitacional para fechar portas



Um administrador de um cinema, para não comprar um braço hidráulico comercial, concebeu um dispositivo como o que se mostra na figura, para que a porta, de massa  $M$ , do seu estabelecimento se feche automaticamente quando a deixam aberta. Ata-se um fio, de massa desprezável/desprezível, no extremo superior da porta, que passa por duas argolas fixas no aro/portal da porta (desprezar a dimensão destas argolas). O fio, que desliza sem atrito, tem preso na outra extremidade uma garrafa de peso desprezável/desprezível contendo a massa  $m$  de água, muito menor do

que a massa da porta ( $m \ll M$ ). A porta, de largura  $d$  e altura  $l = 2,0$  m, é uma placa de vidro de espessura  $w = 10$  mm e densidade  $\rho = 5,0 \text{ g/cm}^3$ . O modo de funcionamento do dispositivo é simples: se a porta estiver aberta, e ela pode abrir-se até um ângulo máximo de  $90^\circ$ , a garrafa com água desce por acção/ação do seu peso, levando a porta a fechar-se devido à força que lhe é comunicada pelo fio. Mais adiante ir-se-á assumir que, ao fechar-se completamente, a porta sofre uma colisão perfeitamente inelástica e considerar-se-ão desprezáveis/desprezíveis todas as forças de atrito.

Recordar que o momento de inércia de uma barra de massa  $M$  em relação a um eixo paralelo a um dos seus lados e que passa pelo seu centro de massa é  $I = \frac{ML^2}{12}$ , onde  $L$  é o comprimento do lado perpendicular ao eixo.

1.1) Se o vidro de que é feita a porta se estilhaçar quando a velocidade de impacto da extremidade da porta exceder  $v_{\text{max}} = \frac{\varphi}{ld}$ , onde  $\varphi = 3,0 \text{ m}^3/\text{s}$ , e a massa de água na garrafa for 1,0 kg, que condição se deve impor à largura da porta para que o vidro não quebre? Supor que o fio é inextensível. **[3 pontos]**

1.2) Supor agora que, no momento em que a porta se fecha, o fio deixa de ser inextensível e passa a comportar-se como uma mola de constante elástica  $k = 10 \text{ N/mm}$ . O fio parte se se exercer sobre ele uma tensão superior a  $T_{\text{lim}} = 200 \text{ N}$ . Qual

é a massa máxima de água que pode ser colocada na garrafa sem que o fio se parta quando a porta se fecha? **[3,5 pontos]**

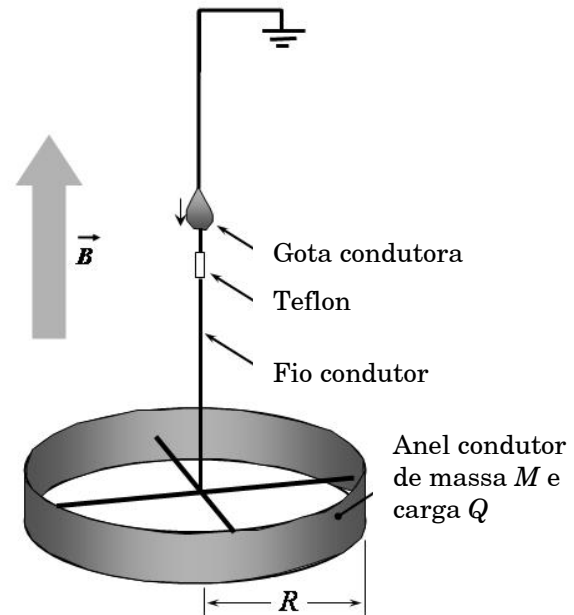
- 1.3) Alguém abre lentamente a porta do cinema até que haja uma pequena separação de 5,0 cm entre a extremidade da porta e o aro/portal da mesma. Ao aperceber-se/perceber-se que o filme em exibição é “Gladiator II” arrepende-se e larga a porta. Quanto tempo demora esta a fechar-se? (Para este problema supor que a largura da porta é  $d = 80$  cm e que a massa de água é  $m = 1,0$  kg.) **[3,5 pontos]**

## 2. Um paradoxo de Feynman

Considerar o sistema da figura. Um anel metálico muito fino, com carga  $Q$  e massa  $M$ , está suspenso por um fio condutor. O conjunto forma um pêndulo de torção de coeficiente  $K$  (momento de força necessário para rodar o anel de 1 radiano). Considerar que o raio do anel é  $R$ , e que este está suspenso através de uma cruz metálica que está soldada a ele e ao fio de sustentação. O fio está interrompido por um pequeno segmento de teflon, que é um excelente isolante eléctrico. Todo o sistema está imerso num campo magnético  $\vec{B}$ , paralelo ao fio de sustentação.

Descrevamos agora a situação em que se observa o paradoxo. Considerar que uma pequena gota de líquido condutor desliza pelo fio sem intervenção de qualquer agente exterior até alcançar o segmento de teflon. Quando aí chega é estabelecida a condutividade eléctrica em todo o fio. Quando isso acontece, *observa-se que o anel roda, o que parece violar a lei de conservação do momento angular*. É este justamente o paradoxo que se pretende analisar nas alíneas seguintes.

Desprezar a resistência dos fios e da gota condutora, bem como a massa dos fios condutores. Supor que o sistema está no vácuo e que a descarga do anel ocorre tão rapidamente que este quase não roda durante o processo.

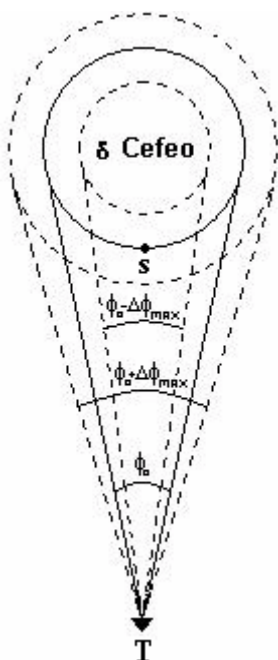


- 2.1) Determinar o momento angular do anel imediatamente após a sua descarga, em função de  $Q$ ,  $R$  e  $B$ . **[5 pontos]**
- 2.2) Obter uma expressão para o ângulo máximo de rotação do anel após a descarga, **[3 pontos]**
- 2.3) Supor que a bobina que produz o campo magnético tem um raio infinito. Indique que parte do sistema (anel metálico, fios condutores, campo electromagnético...) perde o momento angular ganho pelo anel. **[2 pontos]**

NOTA: Um pêndulo de torção é análogo a um sistema massa-mola, logo todos os parâmetros e leis do oscilador em translação têm análogos no pêndulo de torção. Por exemplo, o análogo da elongação de uma mola é, no pêndulo de torção, o ângulo de rotação;  $F = kx$  tem o seu análogo em  $\tau = K\theta$ ; etc.

### 3. Observando a estrela $\delta$ de Cefeu

A estrela  $\delta$  de Cefeu é uma representante típica do numeroso grupo de estrelas pulsantes conhecidas como *cefeidas clássicas*. Estas estrelas caracterizam-se por variações periódicas do brilho, associadas a pequenas oscilações dos seus raios.



Sabe-se que o período destas oscilações para  $\delta$  de Cefeu é  $\tau$ , e que no processo o diâmetro angular, medido a partir de um observatório **T** na Terra, varia entre  $\phi_0 - \Delta\phi_{\max}$  e  $\phi_0 + \Delta\phi_{\max}$  (ver figura). Todos estes ângulos são muito pequenos. Sabe-se também que, devido ao efeito Doppler, a luz de comprimento de onda  $\lambda$  correspondente a uma dada transição no átomo de hélio, emitida no ponto **s** da superfície da estrela no instante em que a velocidade de expansão é máxima, é detectada com um comprimento de onda deslocado de  $\Delta\lambda$ . Com estes dados, é possível determinar a massa  $M$  de  $\delta$  de Cefeu e a distância  $L$  a que a estrela se encontra da Terra. Para tal, considera-se  $\delta$  de Cefeu como uma esfera de gás quente que se dilata e contrai adiabaticamente e despreza-se tanto o movimento da Terra como qualquer efeito relativista.

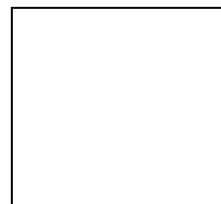
3.1) O movimento pulsante de  $\delta$  de Cefeu pode ser considerado harmónico simples. Determinar a distância  $L$  do centro da estrela ao observatório terrestre a partir do desvio Doppler  $\Delta\lambda$  da luz de comprimento de onda  $\lambda$ . Apresentar o resultado em função dos parâmetros observados a partir de **T** e da velocidade da luz no vácuo,  $c$ . Ter em conta que o desvio Doppler de um sinal luminoso emitido por uma fonte que se aproxima do receptor com uma velocidade  $v$  é dado pela expressão  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$ . [4 pontos]

Para responder às perguntas seguintes, concentre-se na expressão da 2ª Lei de Newton para um pequeno volume da estrela de massa  $m$  que se encontra muito próximo da superfície da estrela. Sobre esta massa actua uma força  $P \cdot A$  que a empurra para fora, onde  $P$  é a pressão e  $A$  é a área do volume, e uma força de atracção/atracção devida a praticamente toda a massa  $M$  da estrela. Ter em conta que a área total do pequeno volume é  $A = \Omega \cdot R^2$ , onde  $R$  é a distância da massa  $m$  ao centro e  $\Omega$  é uma constante.

3.2) As grandezas correspondentes à posição de equilíbrio da estrela são denotadas/indicadas por um índice “0”. Obter uma expressão para a pressão em equilíbrio,  $P_0$ , em função de  $m, \phi_0, \Omega, \Delta\lambda, \lambda, M$ , e da constante gravitacional  $G$ . [3 pontos]

3.3) Tendo em conta os resultados obtidos nas alíneas anteriores, encontrar uma expressão para a frequência de oscilação de  $\delta$  de Cefeu em função de  $M$ ,  $L$ ,  $\phi_0$ , do expoente adiabático  $\gamma$  e da constante de gravitação universal  $G$ . A partir desta expressão, determinar a massa  $M$  de  $\delta$  de Cefeu em função de  $\gamma$ ,  $G$ ,  $c$  e dos parâmetros observados que foram descritos no segundo parágrafo do enunciado. **[3 pontos]**

NOTAS: Se  $\Delta R = R - R_0$ , e tendo em conta que as oscilações são pequenas, utilize a aproximação  $\left(1 + \frac{\Delta R}{R_0}\right)^\alpha \approx 1 + \alpha \frac{\Delta R}{R_0}$ . Lembre-se que num processo adiabático se verifica  $PV^\gamma = \text{constante}$ , onde  $P$  e  $V$  são a pressão e o volume do gás, respectivamente.



**Folha de respostas**

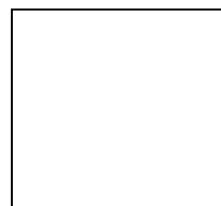
**1.**

1.1)

1.2)

1.3)

Número de folhas adicionais para a resposta ao problema 1:



## Folha de respostas

**2.**

2.1)

--

2.2)

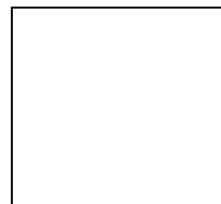
--

2.3)

--

Número de folhas adicionais para a resposta ao problema 2:
------------------------------------------------------------





### Folha de respostas

**3.**

3.1)

3.2)

3.3)

Número de folhas adicionais para a resposta ao problema 3: