

OLIMPIADAS DE FÍSICA

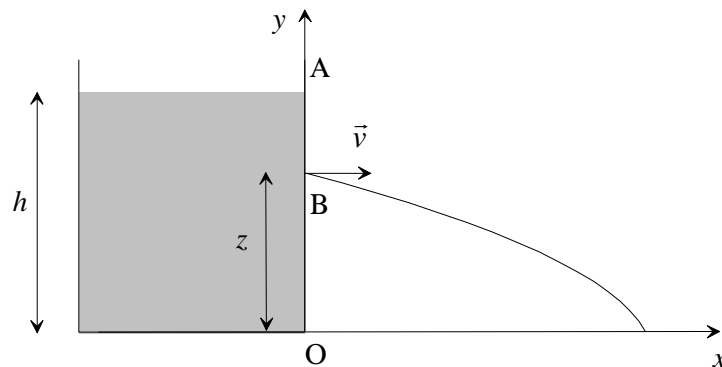
Seleção para as provas internacionais

30 de Maio de 2003

Resolução da Prova Teórica

I – Vários tópicos

a)



A água sai do ponto B, onde se faz o furo, com velocidade horizontal de módulo v . Aplicando a equação de Bernoulli aos pontos A e B,

$$P_A + \rho gh = P_B + \rho gz + \frac{1}{2} \rho v^2$$

onde ρ é a densidade da água. Como a pressão é a mesma nos dois pontos (pressão atmosférica), $v = \sqrt{2g(h-z)}$ (esta é a velocidade de um projectil deixado cair de A, ao passar por B). Considerando agora o movimento de um projectil lançado de B com esta velocidade,

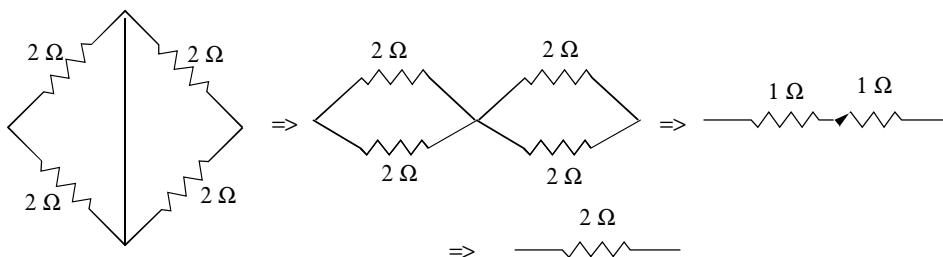
$$\begin{cases} x = vt \\ y = z - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}; \text{ quando chega ao solo } \begin{cases} x = \sqrt{2g(h-z)} t \\ 0 = z - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} - \\ \end{array} \right. t = \sqrt{\frac{2z}{g}}.$$

Substituindo este tempo na expressão de x , obtém-se $x = 2\sqrt{z(h-z)}$. Esta expressão mostra que se o furo for feito no cimo ou no fundo o alcance é nulo. Derivando x em ordem a z e igualando a zero (para encontrar o extremo),

$$\frac{dx}{dz} = \frac{h-2z}{2\sqrt{gz(h-z)}} = 0,$$

de onde se conclui que $z = h/2$. O furo deve ser feito a meia altura.

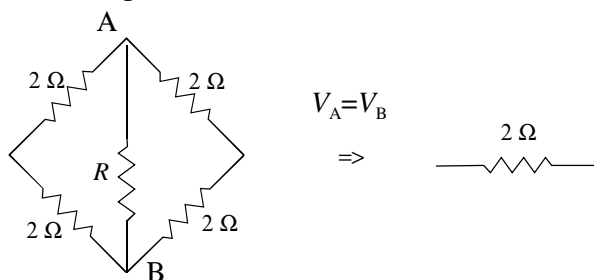
b) Quando a resistência R é nula, o conjunto de resistências é equivalente a



A resistência equivalente é, portanto, 2Ω . A corrente medida no amperímetro é então

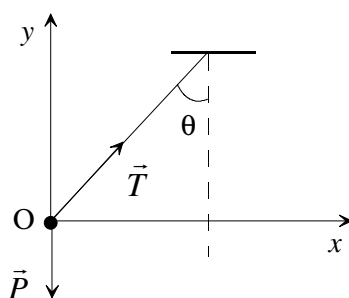
$$I = \frac{V}{R} = \frac{12}{2} = 6 \text{ A}.$$

Quando a resistência não é zero, notar que os pontos A e B ainda estão ao mesmo potencial. Portanto, através da resistência R não passa corrente (!) e esses dois pontos podem estar ligados por uma resistência de qualquer valor (entre zero e infinito) que a resistência equivalente é sempre 2Ω



A corrente no amperímetro é sempre 6 A qualquer que seja R .

c) Considera-se que a direcção do móvel é x e designa-se a sua aceleração por a . Com o material disponível faz-se um pêndulo como mostra a figura. O ângulo a medir com o transferidor é θ .



$$\begin{cases} T \sin \theta = ma \\ T \cos \theta = mg \end{cases} \quad \text{e, portanto, } a = g \sin \theta$$

d) Energia do satélite em órbita uma altitude h :

$$E_{\text{orb}} = \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{M_T m}{R_T + h}$$

A força gravítica é a força centrípeta:

$$G \frac{M_T m}{(R_T + h)^2} = \frac{mv^2}{R_T + h} \quad \text{donde} \quad mv^2 = G \frac{M_T m}{R_T + h}.$$

Usando esta expressão no termo de energia cinética da expressão anterior, vem

$$E_{\text{orb}} = -\frac{1}{2}G \frac{M_T m}{R_T + h}$$

Junto ao solo a energia é

$$E_{\text{solo}} = \frac{1}{2}mv_f^2 - G \frac{M_T m}{R_T}$$

com v_f a velocidade com que o satélite atinge o solo. A variação de energia mecânica é igual ao trabalho realizado pelas forças não conservativas (no caso, forças de resistência do ar):

$$\Delta E_{\text{mec}} = E_{\text{solo}} - E_{\text{orb}} = W_{\text{dis}}$$

logo,

$$W_{\text{dis}} = \frac{1}{2}mv_f^2 - GM_T m \left[\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2(R_T + h)} \right] = -21,5 \text{ GJ}.$$

e) A equação de estado do gás ideal é $Pv = RT$, onde $v = V/n$ é o volume molar. Atendendo aos dados da questão,

$$P_1 = \frac{RT_1}{v_1}, \quad P_2 = \frac{RT_1}{v_2}, \quad P_3 = \frac{RT_2}{v_2}, \quad P_4 = \frac{RT_2}{v_1}.$$

O gás é monoatômico pelo que a sua capacidade térmica molar a volume constante é

$$c_v = \frac{3R}{2}.$$

Num processo isotérmico a variação de energia interna é nula pois, para um gás ideal, a energia interna só depende da temperatura:

$$\Delta u = c_v (T_f - T_i).$$

O trabalho realizado num processo isotérmico é

$$w_{\text{isotérmico}} = -\int_{v_i}^{v_f} P dv = -RT \int_{v_i}^{v_f} \frac{dv}{v} = -RT \ln \frac{v_f}{v_i}$$

Num processo a volume constante o trabalho é nulo. A primeira lei da termodinâmica escreve-se $\Delta u = w + q$.

Processo	Δu	w	q
1 \rightarrow 2 isotérmico	0	$-RT_1 \ln \frac{v_2}{v_1}$	$RT_1 \ln \frac{v_2}{v_1}$
2 \rightarrow 3 isocórico	$-\frac{3R}{2}(T_1 - T_2)$	0	$-\frac{3R}{2}(T_1 - T_2)$
3 \rightarrow 4 isotérmico	0	$RT_2 \ln \frac{v_2}{v_1}$	$-RT_2 \ln \frac{v_2}{v_1}$
4 \rightarrow 1 isocórico	$\frac{3R}{2}(T_1 - T_2)$	0	$\frac{3R}{2}(T_1 - T_2)$

O trabalho total realizado sobre o exterior é $|w| = R(T_1 - T_2) \ln \frac{v_2}{v_1}$. O calor total recebido pelo sistema é a soma dos calores nos processos 12 e 41, ou seja

$$q_{\text{entra}} = RT_1 \ln \frac{v_2}{v_1} + \frac{3R}{2}(T_1 - T_2)$$

o rendimento é $\eta = |w| / q_{\text{entra}}$, ou seja

$$\eta = \frac{(T_1 - T_2) \ln \frac{v_2}{v_1}}{T_1 \ln \frac{v_2}{v_1} + \frac{3}{2}(T_1 - T_2)}.$$

f) No referencial do comboio os tempos que os dois sinais demoram a chegar aos pontos A' e B' são iguais. Encontram-se dividindo a distância percorrida, $L_0/2$ pela velocidade da luz:

$$t'_A = t'_B = \frac{L_0}{2c}$$

Ainda no referencial S', o tempo de ida e volta do sinal luminoso que é reflectido em B' é

$$\Delta t' = \frac{L_0}{c}$$

pois a distância percorrida é L_0 . Este intervalo de tempo é próprio em S'. Em S este intervalo de tempo é maior:

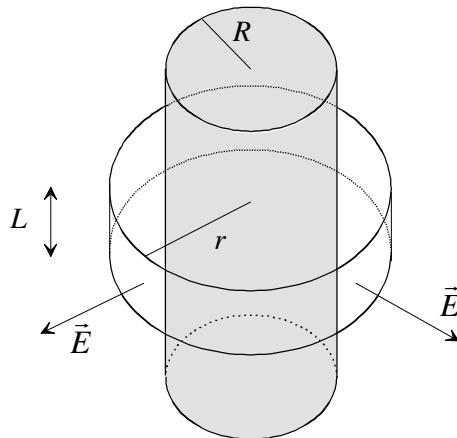
$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{L_0}{c\sqrt{1 - 0,36}} = \frac{L_0}{0,8c}$$

II – Campos eléctricos e magnéticos

De acordo com a lei de Gauss, o fluxo do campo eléctrico que sai através de uma superfície fechada é proporcional à carga contida no interior dessa superfície:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

a) Como a distribuição de carga é muito longa, o campo é perpendicular ao eixo do cilindro e só depende da coordenada cilíndrica r (distância ao eixo dos zz) que é o eixo do cilindro.



Usa-se como superfície de Gauss uma superfície cilíndrica de raio r e altura L , cujo eixo coincide com o eixo da distribuição cilíndrica de carga. Esse fluxo é não nulo apenas através da superfície lateral, pois através das bases o campo eléctrico é perpendicular à normal a essas mesmas bases. Então

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = 2\pi r L E$$

Se $r \geq R$, a carga total encerrada pela superfície de Gauss é $Q = \pi R^2 L \rho$ pelo que

$$2\pi r L E = \frac{\pi R^2 L \rho}{\epsilon_0}$$

donde

$$\vec{E} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \hat{e}_r, \quad r \geq R$$

Para $r \leq R$, a carga encerrada é $Q' = \pi r^2 L \rho$, pelo que

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \hat{e}_r, \quad r \leq R$$

b) O furo no cilindro pode ser visto como tendo sido obtido por meio de uma sobreposição de carga negativa. O campo eléctrico no interior do cilindro com eixo em $x = R/2$ e carga negativa é

$$\vec{E}' = -\frac{\rho r'}{2\epsilon_0} \hat{e}'_r, \quad r' = \sqrt{\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2}$$

O campo eléctrico devido ao cilindro maior é ($r \hat{e}_r = \vec{r} = x \hat{e}_x + y \hat{e}_y$)

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} (x \hat{e}_x + y \hat{e}_y)$$

O campo devido ao cilindro menor é ($r' \hat{e}'_r = \vec{r}' = \left(x - \frac{R}{2}\right) \hat{e}_x + y \hat{e}_y$)

$$\vec{E}' = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[\left(x - \frac{R}{2}\right) \hat{e}_x + y \hat{e}_y \right]$$

O campo total é

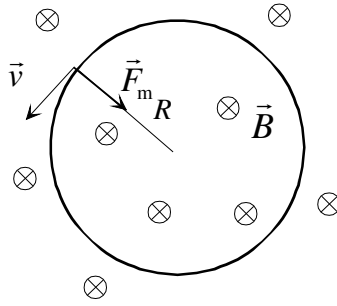
$$\vec{E} + \vec{E}' = \frac{\rho R}{4\epsilon_0} \hat{e}_x.$$

Trata-se de um campo constante.

c) Para o movimento ser circular uniforme a força magnética tem de ser centrípeta:

$$F_m = \frac{mv^2}{R},$$

sendo v a velocidade da partícula de massa m e R o raio da trajectória circular. Por outro lado, $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$, sendo q a carga eléctrica da partícula e \vec{B} o campo magnético. A força é perpendicular à velocidade e ao campo magnético e estes dois vectores são perpendiculares entre si (se não o movimento seria em espiral)



A intensidade da força magnética é $F_m = qvB$. Inserindo na equação anterior, vem $qvB = \frac{mv^2}{R}$, donde

$$v = \frac{qBR}{m}$$

O período do movimento circular uniforme é

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$

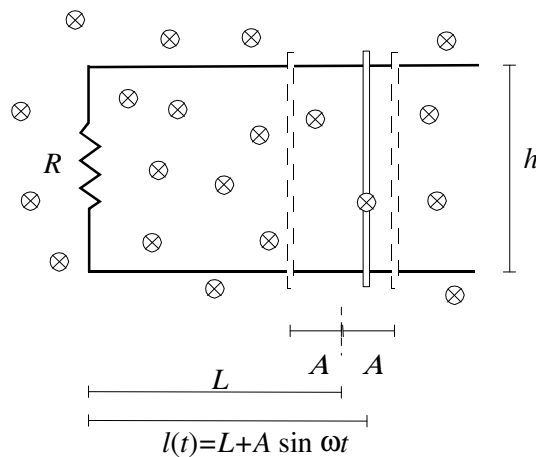
A frequência – que é o inverso do período – é

$$f = \frac{qB}{2\pi m}$$

que não depende da velocidade.

d) Designando por l a distância da resistência à barra deslizante e sendo $l(t=0) = L$, a área limitada pelo circuito é

$$S(t) = l(t) \times h = (L + A \sin \omega t)h$$



O fluxo do campo magnético é o produto da área, $S(t)$ por B , pois o campo magnético é perpendicular ao plano do circuito como se mostra na figura:

$$\phi = Bh(L + A \sin \omega t).$$

A força electromotriz induzida é

$$\varepsilon_i = -\frac{d\phi}{dt} = -BhA\omega \cos \omega t$$

e a corrente induzida no circuito é

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{BhA\omega}{R} \cos \omega t.$$

A potência instantânea dissipada na resistência é

$$P(t) = RI^2 = \frac{(BhA\omega)^2}{R} \cos^2 \omega t$$

A potência média é o valor da energia dissipada num período da oscilação, T , a dividir pelo período:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{(BhA\omega)^2}{R} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt$$

Ora, $\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \frac{1}{2}$ e portanto

$$\bar{P} = \frac{(BhA\omega)^2}{2R}.$$

III – Mecânica

a) O equilibrista pode ser considerado, do ponto de vista da distribuição de massas, como sendo equivalente a uma barra homogênea de massa M e comprimento l . O seu momento de inércia para rotação em torno de um eixo paralelo à corda bamba que passe pelo centro de massa do funâmbulo é portanto

$$I_{F,CM} = \frac{1}{12} Ml^2.$$

Como o eixo de rotação coincide com a corda bamba é preciso supor que o centro de massa do funâmbulo se encontra precisamente a meia altura e recorrer ao Teorema de Steiner para obter o momento de inércia do equilibrista em relação à corda:

$$I_F = I_{F,CM} + M \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} Ml^2$$

Com a barra passa-se algo semelhante. O seu momento de inércia para rotação em torno de um eixo paralelo à corda bamba que passe pelo centro de massa da barra é

$$I_{B,CM} = \frac{1}{12} mL^2.$$

Assim, o momento de inércia da barra em relação à corda bamba é

$$I_B = I_{B,CM} + m(fl)^2 = \frac{1}{12} mL^2 + m(fl)^2.$$

O momento de inércia do sistema funâmbulo+barra é pois

$$I = I_F + I_B = \frac{1}{3} Ml^2 + \frac{1}{12} mL^2 + m(fl)^2.$$

b) A força responsável pelo eventual desequilíbrio do funâmbulo é a força da gravidade. O momento desta força em relação ao ponto da corda onde o equilibrista se apoia é, quando o funâmbulo está inclinado de um ângulo θ em relação à vertical:

$$G = G_F + G_B = Mg \frac{l}{2} \sin \theta + mgfl \sin \theta$$

Devido a este momento o funâmbulo descreve um movimento de rotação em torno da corda, sendo a sua aceleração angular dada por

$$I\ddot{\theta} = G.$$

Reparar que este momento não é um momento de restauro: uma vez perdido o equilíbrio...

c) Se o funâmbulo se tiver afastado muito pouco da vertical o ângulo θ é pequeno, logo $\sin \theta \approx \theta$. Então a equação anterior fica:

$$I\ddot{\theta} = \frac{gl}{2} (M + 2fm) \sin \theta \approx \frac{gl}{2} (M + 2fm) \theta.$$

As soluções desta equação são:

$$\theta(t) = Ae^{\Lambda t} + Be^{-\Lambda t},$$

com

$$\Lambda = \sqrt{\frac{gl(M + 2fm)}{2I}} = \sqrt{\frac{6gl(M + 2fm)}{4Ml^2 + mL^2 + 12m(fl)^2}}.$$

Como em $t = 0$ o funâmbulo ainda não se tinha desequilibrado, $B = -A$, logo

$$\theta(t) = A(e^{\Lambda t} - e^{-\Lambda t}).$$

Para valores de t próximos de zero $e^{\Lambda t} \approx 1 + \Lambda t$, logo

$$\theta(t) \approx A[(1 + \Lambda t) - (1 - \Lambda t)] = 2A\Lambda t.$$

Λ pode então ser vista como o inverso duma constante de tempo que mede o tempo necessário para que θ aumente de $2A$.

d) A razão entre os valores de $1/\Lambda$ para estas duas situações é:

$$\begin{aligned} \frac{1/\Lambda_{\text{com barra}}}{1/\Lambda_{\text{sem barra}}} &= \frac{\Lambda_{\text{sem barra}}}{\Lambda_{\text{com barra}}} = \sqrt{\frac{\frac{6glM}{4Ml^2}}{\frac{6gl(M+2fm)}{4Ml^2 + mL^2 + 12m(fl)^2}}} = \sqrt{\frac{4Ml^2 + mL^2 + 12m(fl)^2}{4l^2(M+2fm)}} = \\ &= \sqrt{3,309} = 1,819, \end{aligned}$$

ou seja, o tempo de que o funâmbulo dispõe para se reequilibrar é quase duplicado se ele levar uma barra com estas características...

e) Neste caso o momento de inércia da barra relativamente à corda é:

$$I_B = I_{B,CM} + m(fl)^2 = 2 \times \frac{m}{2} \left(\frac{L}{2}\right)^2 + m(fl)^2 = \frac{1}{4}mL^2 + m(fl)^2.$$

A constante de tempo fica então:

$$\Lambda = \sqrt{\frac{gl(M+2fm)}{2I}} = \sqrt{\frac{gl(M+2fm)}{2\left(\frac{1}{3}Ml^2 + \frac{1}{4}mL^2 + m(fl)^2\right)}} = \sqrt{\frac{6gl(M+2fm)}{4Ml^2 + 3mL^2 + 12m(fl)^2}},$$

logo

$$\begin{aligned} \frac{1/\Lambda_{\text{com barra}}}{1/\Lambda_{\text{sem barra}}} &= \frac{\Lambda_{\text{sem barra}}}{\Lambda_{\text{com barra}}} = \sqrt{\frac{\frac{6glM}{4Ml^2}}{\frac{6gl(M+2fm)}{4Ml^2 + 3mL^2 + 12m(fl)^2}}} = \sqrt{\frac{4Ml^2 + 3mL^2 + 12m(fl)^2}{4l^2(M+2fm)}} = \\ &= \sqrt{8,023} = 2,832, \end{aligned}$$

sendo por isso quase triplicado o tempo de resposta do funâmbulo. Esta barra é mais eficaz!

f) Atendendo a que o valor de Λ aumenta com o aumento de l ou de M , o funâmbulo ideal é um indivíduo leve e de baixa estatura, mas suficientemente forte para transportar a barra...