

OLIMPIADAS DE FÍSICA

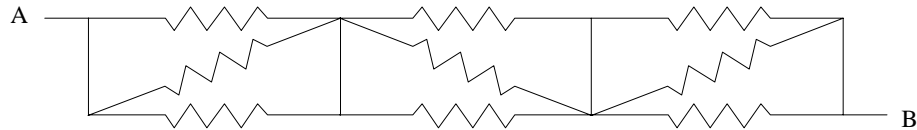
Seleção para as provas internacionais

31 de Maio de 2002

Resolução da Prova Teórica

I – Vários tópicos

a)



Cada grupo de resistências no mesmo alinhamento vertical é equivalente a $\frac{R}{3}$, pois estão em paralelo; estando os três grupos em série, a resistência equivalente entre A e B é $3 \times \frac{R}{3} = R$.

b) A força gravítica é $F_g = mg$, sendo m a massa da partícula e g a aceleração da gravidade. Designando por q o módulo da carga da partícula e por E a intensidade do campo magnético, $mg = qE$

e portanto

$$E = \frac{mg}{q} = \frac{10^{-3} \times 9,8}{10^{-6}} = 9,8 \times 10^3 \text{ V/m}.$$

O campo eléctrico \vec{E} , com esta intensidade, deve ser vertical e apontar para baixo (pois a carga é negativa e, assim, a força eléctrica é vertical e aponta para cima).

Se se utilizar um campo magnético em vez de um campo eléctrico, este deve produzir também uma força vertical que aponta para cima. Se designarmos por \vec{v} a velocidade da partícula, a força magnética terá intensidade qvB se \vec{B} e \vec{v} forem perpendiculares. A intensidade do campo magnético será então

$$B = \frac{mg}{qv} = \frac{10^{-3} \times 9,8}{10^{-6} \times 10^6} = 9,8 \times 10^{-3} \text{ T}.$$

O campo magnético e a velocidade estão indicados na figura



c) Da equação de continuidade aplicada aos pontos 1 e 2, e designando por V a velocidade no ponto 2,

$$vA = Va, \text{ donde } V = v \frac{A}{a}.$$

Da equação de Bernoulli,

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho V^2.$$

Designando a diferença de pressão por $\Delta P = P_1 - P_2$, e combinando as equações anteriores obtém-se

$$v^2 \rho (A^2 - a^2) = 2 \Delta P a^2$$

e finalmente

$$v = \sqrt{\frac{2a^2 \Delta P}{\rho (A^2 - a^2)}}$$

d) Designemos por V o volume inicial, por P a pressão e por T a temperatura inicial. De acordo com a lei dos gases perfeitos, $PV = nRT$, aplicada ao estado final e inicial, e sendo o processo isobárico, obtém-se

$$\frac{V}{T} = \frac{1,2V}{T'}$$

donde se obtém a temperatura final T' :

$$T' = 1,2T = 1,2 \times 270 = 324 \text{ K}.$$

O fluxo de calor para o sistema durante o processo é

$$Q = mc_p(T' - T) = 10^{-1} \times 1005 \times 54 = 5427 \text{ J}.$$

O trabalho realizado calcula-se mais facilmente aplicando a expressão da primeira lei, $\Delta U = Q + W$, depois de se conhecer a variação de energia interna que é dada por $\Delta U = mc_v \Delta T$. Ora $c_v = c_p / \gamma = 1005 / 1,4 = 717,9 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$, donde

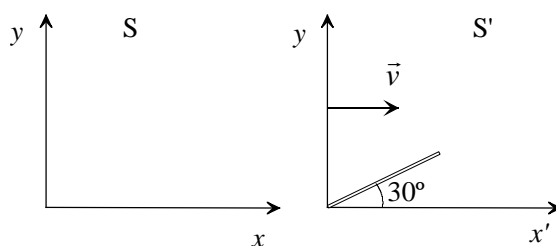
$$\Delta U = 0,1 \times 717,9 \times 54 = 3876 \text{ J}.$$

Finalmente,

$$W = \Delta U - Q = 3876 - 5427 = -1551 \text{ J}$$

Sendo negativo, este trabalho é realizado sobre o exterior.

e)



As projecções da barra segundo os eixos x' e y' são $L_{0x'} = L_0 \cos 30^\circ$ e $L_{0y'} = L_0 \sin 30^\circ$.

No referencial S, a projecção segundo o eixo y mantém-se: $L_{0y} = L_{0y'} = L_0 / 2$ mas segundo

o eixo x diminui (contração de Lorentz): $L_{0x} = L_{0x'} \sqrt{1 - \beta^2} = L_0 \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 - 0,5^2}$, onde

$\beta = v / c$. Obtém-se $L_{0x} = L_0 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4} L_0$. O ângulo pedido é portanto

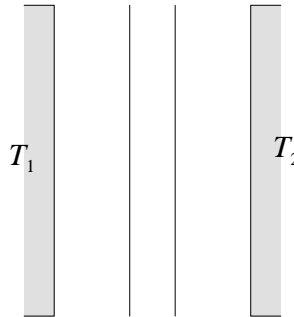
$$\alpha = \arctan \frac{L_{0y}}{L_{0x}} = \arctan \frac{\frac{1}{2} L_0}{\frac{3}{4} L_0} = \arctan \frac{2}{3} = 33,7^\circ.$$

O comprimento da régua no referencial S é $L = L_{0y} / \sin 33,7^\circ = 9,01 \text{ m}$.

O tempo indicado para a vida média dos piões é um tempo próprio no referencial S'. No referencial S, e usando a expressão da dilatação do tempo, a vida média é

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{2 \times 10^{-8}}{\sqrt{0,75}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times 2 \times 10^{-8} = 2,31 \times 10^{-8} \text{ s}.$$

f)



O fluxo de energia (energia por unidade de tempo e por unidade de área) que se estabelece entre os corpos negros 1 e 2 é (lei de Stefan-Boltzmann)

$$I = \sigma(T_1^4 - T_2^4)$$

Quando se colocam as duas placas intermédias (corpos negros também) os fluxos entre elas são iguais, depois de se atingir o regime estacionário:

$$I' = \sigma(T_1^4 - T_a^4) = \sigma(T_a^4 - T_b^4) = \sigma(T_b^4 - T_2^4)$$

estando a designar-se por a a placa do escudo mais perto de 1 e por b a mais perto da 2. Da segunda das expressões tem-se o seguinte sistema de equações:

$$T_1^4 - T_a^4 = T_a^4 - T_b^4$$

$$T_1^4 - T_a^4 = T_b^4 - T_2^4$$

cuja solução é

$$T_a^4 = \frac{2T_1^4 + T_2^4}{3} \text{ e } T_b^4 = \frac{T_1^4 + 2T_2^4}{3}.$$

O fluxo de energia na presença do escudo térmico é, portanto,

$$I' = \sigma \left(T_1^4 - \frac{2T_1^4 + T_2^4}{3} \right) = \frac{\sigma}{3} (T_1^4 - T_2^4) = \frac{I}{3}.$$

II – Cilindro num plano inclinado

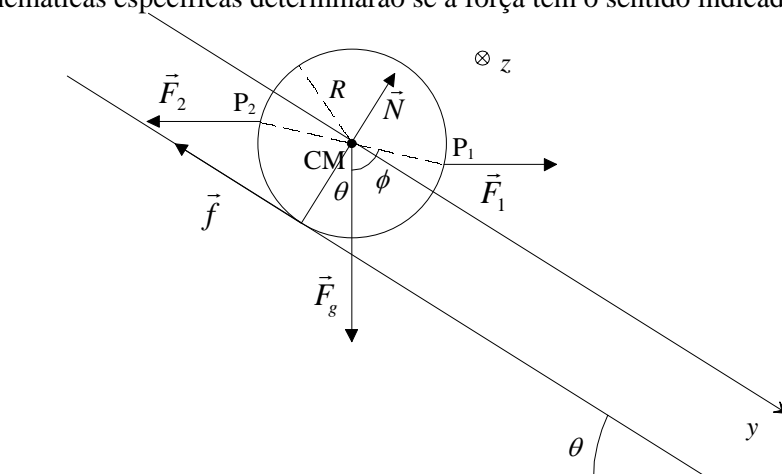
a) Como o rolamento se dá sem escorregamento,

$$a = \alpha R$$

$$\phi = \frac{x}{R} + \phi_0.$$

$$v_{P_1} = v_{CM} \sqrt{2 + 2 \cos \theta'}, \text{ sendo } \theta' \text{ o ângulo que a velocidade de } P_1 \text{ faz com o eixo } x.$$

b) Para além das forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 estão aplicadas no cilindro a força gravítica \vec{F}_g , a força de reacção normal \vec{N} (perpendicular ao plano inclinado) e a força de atrito estática \vec{f} . A força de atrito, sobre o plano inclinado representa-se tentativamente a apontar para cima mas só as condições cinemáticas específicas determinarão se a força tem o sentido indicado ou o oposto.



c) A Lei de Newton aplicada à translação do centro de massa conduz à expressão:

$$-f + m g \sin \theta = ma. \quad (1)$$

Para a rotação em torno do eixo do cilindro,

$$fR - 2FR \cos \phi = I\alpha. \quad (2)$$

Como há rolamento sem escorregamento, $\alpha = a / R$, como vimos na alínea a). Fazendo esta substituição em (2) e usando o valor do momento de inércia do cilindro,

$$f - 2F \cos \phi = \frac{1}{2}ma \text{ ou ainda } f = 2F \cos \phi + \frac{1}{2}ma.$$

Inserindo este valor em (1) obtém-se

$$m g \sin \theta - 2F \cos \phi = \frac{3}{2}ma$$

ou ainda

$$ma = \frac{2}{3}m g \sin \theta - \frac{4}{3}F \cos \phi. \quad (3)$$

d) A expressão (3) mostra que o movimento do centro de massa pode ser visto como o de uma partícula de massa m sujeita a uma força que é dada pelo segundo membro dessa equação. Usando a expressão de ϕ em função de x encontrada na alínea a), esta força pode escrever-se

$$F_R(x) = \frac{2}{3}m g \sin \theta - \frac{4}{3}F \cos\left(\frac{x}{R} + \phi_0\right).$$

Como a força é o simétrico da derivada do potencial,

$$F(x) = -\frac{dU}{dx},$$

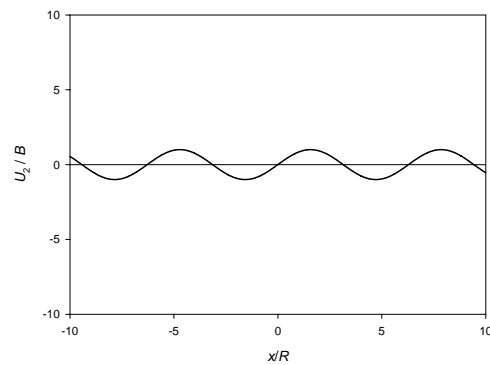
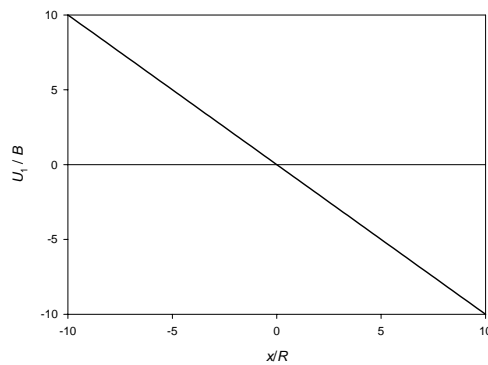
obtemos (a menos de uma constante arbitrária)

$$U(x) = -\int F_R(x)dx = -\frac{2}{3}m g \sin \theta x + \frac{4}{3}FR \sin\left(\frac{x}{R} + \phi_0\right)$$

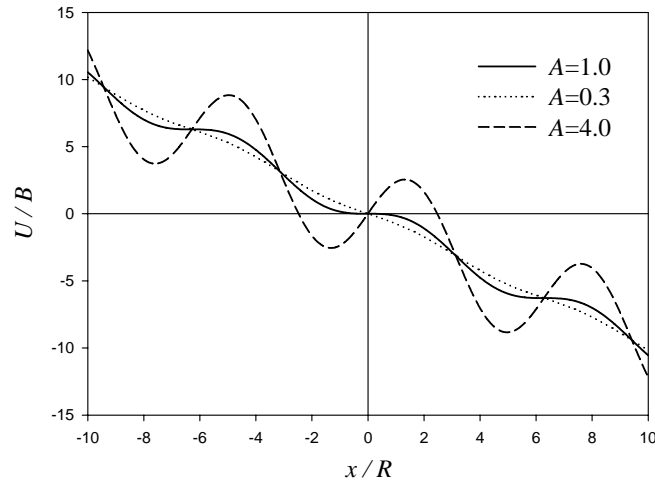
e) Fazendo $\phi_0 = 0$, o potencial pode escrever-se na forma

$$U(x) = B\left[-\frac{x}{R} + A \sin\left(\frac{x}{R}\right)\right] = U_1(x) + U_2(x)$$

onde $A = \frac{2F}{mg \sin \theta}$ e $B = \frac{2mgR \sin \theta}{3}$. Representamos graficamente U_1/B , U_2/B e U/B como funções de x/R .



(no segundo gráfico usou-se $A=1$). A função U/B representa-se no gráfico seguinte, também em função de x/R agora para vários valores de A , que é determinado pelos parâmetros do sistema.



Se $A < 1$ o potencial é uma função decrescente e, portanto, não há pontos de estabilidade: o cilindro rola sempre pelo plano inclinado. Mas, se $A > 1$, o cilindro pode estar em repouso num mínimo de potencial ou oscilar em torno dessa posição de equilíbrio. Se a energia do sistema for suficiente para que possa transpor o máximo local do potencial imediatamente à direita do mínimo de potencial da região onde se encontre, ele rolará pelo plano num movimento descendente e sem retorno. A derivada do potencial é

$$\frac{dU}{dx} = -\frac{B}{R} \left(1 - A \cos \frac{x}{R} \right)$$

que se anula para

$$x = R \arccos \frac{1}{A}.$$

Os mínimos e os máximos do potencial localizam-se em

$$x_n = -\varphi \pm 2n\pi \quad (\text{mínimos}) \quad \text{e} \quad x_{n'} = \varphi \pm 2n'\pi \quad (\text{máximos})$$

onde $0 \leq \varphi = \arccos \frac{1}{A} \leq \frac{\pi}{2}$ e $n, n' = 0, 1, 2, \dots$

III – Placa sobre rolamentos

a) Se se desprezar a energia dissipada nos rolamentos, a diminuição da energia potencial gravítica da placa de madeira enquanto desce a rampa traduz-se apenas no aumento da energia cinética da placa e da energia cinética rotacional dos rolamentos. Como a placa se apoia em vários rolamentos ($L \gg d$) é lícito supor que o ponto de contacto do último rolamento (o rolamento colocado mais alto que está ainda em contacto com a placa de madeira) com a placa se desloca com uma velocidade igual à da placa. A equação de conservação da energia quando a placa percorre uma distância l sobre a rampa pode-se então escrever:

$$\frac{1}{2} Mv_i^2 + Mgl \sin \alpha = \frac{1}{2} Mv_f^2 + E_{\text{rolamentos}}$$

em que v_i e v_f são a velocidade inicial e final da placa e $E_{\text{rolamentos}}$ é a energia cinética adquirida pelos rolamentos. A placa vai acelerando até atingir uma velocidade tal que toda a energia potencial se converte em energia cinética dos rolamentos. Daí em diante a placa não ultrapassa essa velocidade v_{max} . Como se assume que os rolamentos ficam, depois da passagem da placa sobre eles, a rodar de tal modo que os pontos da periferia do rolamento se deslocam com velocidade igual à velocidade da placa, a conservação da energia vem:

$$\begin{aligned} Mgl \sin \alpha &= N_{\text{rolamentos}} \frac{1}{2} I \omega_{\text{max}}^2 \\ &= \frac{l}{d} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m r^2 \right) \frac{v_{\text{max}}^2}{r^2} \\ &= \frac{l m v_{\text{max}}^2}{4d} \end{aligned}$$

em que l/d é o número de rolamentos que a placa acelerou enquanto descia l sobre a rampa. Vem então:

$$v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{4dMg \sin \alpha}{m}}.$$

b) Os rolamentos estão inicialmente em repouso. Isto significa que, quando começam a rodar, rodam com uma velocidade diferente da placa (isto é, a velocidade dos pontos da periferia do rolamento é menor que a velocidade da placa). Assim, quando os rolamentos começam a rodar, rodam *com* deslizamento, havendo dissipação de energia pois a fricção com a placa de madeira é uma força de atrito cinético. Só quando os rolamentos atingem a velocidade da placa (isto é, quando a velocidade dos pontos da periferia do rolamento é igual à velocidade da placa) é que passam a rodar sem deslizamento, cessando nessa altura a dissipação de energia (a força de atrito é nesta altura uma força de atrito estático, não realizando trabalho).

c) Analise-se o que se passa quando a placa de madeira já atingiu a velocidade máxima. Os rolamentos são acelerados pela força de atrito com a placa, $F(t)$, que pode não ser constante. Num intervalo de tempo pequeno Δt a variação do momento angular de um rolamento é:

$$I \Delta \omega = r F(t) \Delta t.$$

Somando estas variações sobre todo o tempo de actuação da força de atrito vem:

$$I \sum \Delta \omega = I \omega_{\text{max}} = r \sum F(t) \Delta t.$$

Por outro lado, durante o intervalo de tempo Δt , o trabalho da força de atrito é obtido multiplicando a força pelo deslocamento relativo das superfícies envolvidas:

$$\Delta Q = F(t)(v_{\max} - r\omega(t))\Delta t .$$

Conjugando as três últimas equações obtém-se:

$$\begin{aligned} Q &= \sum \Delta Q \\ &= \sum F(t)(v_{\max} - r\omega(t))\Delta t \\ &= v_{\max} \sum F(t)\Delta t - r \sum \omega(t)F(t)\Delta t \\ &= v_{\max} \frac{I\omega_{\max}}{r} - r \frac{I}{r} \sum \omega(t)\Delta\omega \\ &= I\omega_{\max}^2 - I \sum \Delta\left(\frac{\omega^2}{2}\right) \\ &= I\omega_{\max}^2 - \frac{1}{2} I\omega_{\max}^2 \\ &= \frac{1}{2} I\omega_{\max}^2 \end{aligned}$$

d) A equação que exprime a conservação da energia fica agora:

$$\begin{aligned} Mgl \sin \alpha &= N_{\text{rolamentos}} \left(\frac{1}{2} I\omega_{\max}^2 + Q \right) \\ &= \frac{l}{d} \left(\frac{1}{2} mr^2 \right) \frac{v_{\max}^2}{r^2} \\ &= \frac{lmv_{\max}^2}{2d} \end{aligned}$$

vindo então:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2dMg \sin \alpha}{m}} .$$