

OLIMPIADAS DE FÍSICA

Seleção para as provas internacionais

1 de Junho de 2001

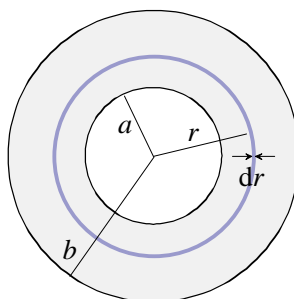
Prova Teórica

Duração da prova: 3H

I. Vários tópicos

Este problema é constituído por várias alíneas sem qualquer ligação entre si.

- a) Em 2100, o record do mundo do salto à vara será de 7,5 m. Fazer uma estimativa do record do mundo na corrida de 100 m livres.
- b) Num anel de raio interno a e externo b existe uma corrente I uniforme que flui no sentido dos ponteiros do relógio. Determinar o campo magnético no centro do disco (sugestão: dividir o disco em espiras de espessura infinitesimal dr e somar a contribuição de todas essas espiras).



- c) Mostrar que para um viajante humano, embora com um tempo de vida limitado como bem sabemos, não há limite relativamente à distância que pode percorrer, pese ainda o facto de a velocidade a que ele se pode deslocar ter um limite superior (que é c , a velocidade da luz).
- d) Um gás ideal ocupa um volume de $4,00 \text{ m}^3$ a uma pressão de $8,00 \text{ atm}$ ($1 \text{ atm} = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$) e a uma temperatura de 400 K . Expande-se o gás até à pressão final de $1,00 \text{ atm}$. Calcular a temperatura e o volume finais, o trabalho realizado, o calor absorvido e a variação de energia interna para uma expansão isotérmica.
- e) Um disco (raio R e momento de inércia I em relação ao seu eixo) roda no plano horizontal, no sentido dos ponteiros do relógio, em torno do seu eixo com velocidade angular ω_0 . Uma partícula de massa m move-se na borda do disco, com velocidade linear de módulo constante, v ($v > \omega_0 R$), em relação à terra,

mas no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. Num certo instante a partícula, devido unicamente a forças internas ao sistema disco-partícula, varia a sua velocidade, terminando parada relativamente ao disco. Determinar a nova velocidade angular de rotação.

- f) Duas fendas estreitas são iluminadas pela luz amarela de sódio ($\lambda = 589 \text{ nm}$). Num alvo a 1 m de distância formam-se riscas espaçadas de 1 cm. Determinar a distância entre as duas fendas.

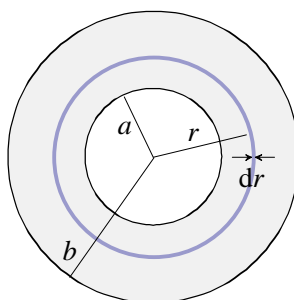
I

- a) No salto com vara toda a energia cinética imediatamente antes do salto é convertida em energia potencial no ponto de altura máxima:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh,$$

donde $v = \sqrt{2gh} = 12,1 \text{ m/s}$. Admitindo que esta é a velocidade média de um(a) corredor(a) de 100 m, o tempo para a prova desta especialidade do atletismo será 8,25 s.

- b) O campo magnético no centro de uma espira de raio r percorrida por uma corrente i é dado por $B = \frac{\mu_0 i}{2r}$, sendo perpendicular ao plano da espira.



A espira indicada na figura é percorrida por uma corrente $di = \frac{I}{b-a} dr$ pelo que o campo de indução magnética, perpendicular ao plano do disco, tem grandeza

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{b-a} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{b-a} (\ln b - \ln a).$$

Como a corrente flui no sentido dos ponteiros do relógio o campo é perpendicular ao plano do papel e aponta para dentro.

- c) Seja S um referencial de inércia e S' um referencial também de inércia, solidário com o viajante, que se desloca em relação a S com velocidade v (que, por conveniência se considera segundo a direcção x de ambos os referenciais). No referencial S o espaço percorrido pelo viajante é

$$d = v\Delta t$$

onde Δt é um intervalo de tempo medido em S. Ora, o tempo medido em S' (tempo próprio) é Δt_0 que se relaciona com Δt através de

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma \Delta t_0,$$

pelo que

$$d = \gamma v \Delta t_0.$$

Ainda que Δt_0 seja limitado (finito) e v também ($v < c$), não há limite superior para d , pois pode ter-se $\gamma \rightarrow \infty$. O ser humano, ainda que com vida limitada e com velocidade máxima também limitada, pode viajar uma distância ilimitada!

- d) A expansão é isotérmica. A temperatura final é $T=400 \text{ K}$. De $PV = nRT$, para uma expansão isotérmica,

$$P_i V_i = P_f V_f$$

e portanto

$$V_f = \frac{P_i}{P_f} V_i = \frac{8}{1} \times 4 = 32,00 \text{ m}^3.$$

O trabalho realizado é obtido a partir de

$$W = - \int_{V_i}^{V_f} P dV = -nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = -nRT \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = -P_i V_i \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right)$$

Substituindo valores, $W = -6,7 \text{ MJ}$. O trabalho é negativo pois trata-se de uma expansão (trabalho realizado *sobre* o exterior).

Como se trata de um gás ideal, a energia interna só depende da temperatura: $U = U(T)$. O processo é isotérmico e portanto $U = \text{Cte}$. Como

$$\Delta U = Q + W$$

resulta $Q = -W = 6,7 \text{ MJ}$ (este calor é positivo: entra no sistema).

- e) Relativamente ao eixo que passa pelo centro, o momento angular inicial é $L_i = mRv - I\omega_0$. No final, o momento angular é $L_f = (mR^2 + I)\omega$ (partícula e disco rodam solidariamente). O momento angular inicial é igual ao momento angular final pelo que

$$\omega = \frac{mRv - I\omega_0}{mR^2 + I}.$$

- f) Designado por d a separação das duas fendas estreitas e por $D = 1 \text{ m}$ a distância fendas–alvo, a condição de máximo é dada por

$$y_{\max} = \frac{n\lambda D}{d} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

sendo λ o comprimento de onda da luz utilizada. Como $\Delta y = 1 \text{ cm}$,

$$d = \frac{\lambda D}{\Delta y} = \frac{589 \times 10^{-9}}{10^{-2}} = 58,9 \times 10^{-6} \text{ m}.$$

II. Experiência de Rutherford (a uma dimensão)

Uma partícula α (massa m), com energia cinética E , colide com um núcleo de ouro (massa M). A colisão é frontal e governada pela interação de Coulomb entre as cargas do núcleo de hélio ($2|e|$) e do ouro ($Z|e|$). A energia potencial de interação entre duas cargas Q e Q' , separadas de uma distância r é $U = k_0 QQ' / r$.

- a) Supor que M é muito maior do que m , podendo considerar-se que a massa do ouro é infinita. Determinar a distância de aproximação máxima da partícula α .

A partir de agora considerar sempre finita a massa M .

- b) Escrever a expressão que relaciona a velocidade de recuo do núcleo de ouro, que designamos por V , com a velocidade da partícula α em qualquer instante, que se designa por v .
- c) Determinar a distância d de aproximação máxima entre as duas partículas. Obter as velocidades das partículas nesse momento.
- d) Determinar a distância entre as partículas, d' , no instante em que a partícula α volta para trás. Quais são as velocidades das partículas nesse mesmo instante?
- e) Calcular as velocidades das partículas no final da colisão.
- f) Taçar, num mesmo gráfico, a velocidade de cada uma das partículas em função da separação entre elas.

II

- a) O átomo de ouro, tendo massa infinita, não recua ($V=0$). No ponto de aproximação máxima, a partícula alfa tem velocidade nula: $v = 0$. Pela conservação da energia mecânica,

$$E = k_0 \frac{2Ze^2}{d} \quad \text{donde} \quad \boxed{d = k_0 2Ze^2 E^{-1}}.$$

- b) Usa-se a conservação do momento linear. O momento linear antes da interação é $\sqrt{2Em}$. Durante a interação é a soma dos momentos da partícula alfa e do núcleo de ouro:

$$\sqrt{2Em} = mv + MV,$$

donde se pode obter V em função de v :

$$\boxed{V = \frac{1}{M} (\sqrt{2Em} - mv)} \quad (1)$$

- c) A energia conserva-se durante a colisão o que permite escrever

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 + k_0 \frac{2Ze^2}{d} \quad (1')$$

Usando (1) nesta expressão,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2M}(2mE + m^2v^2 - 2mv\sqrt{2Em}) + k_0 \frac{2Ze^2}{d}$$

ou ainda

$$k_0 2Ze^2 \frac{1}{d} = \frac{m}{M} \sqrt{2Emv} - \frac{1}{2} m \left(1 + \frac{m}{M}\right) v^2 + \left(1 - \frac{m}{M}\right) E = f(v). \quad (2)$$

O mínimo de d corresponde ao máximo da função. Derivando

$$f(v) = \frac{m}{M} \sqrt{2Emv} - \frac{1}{2} m \left(1 + \frac{m}{M}\right) v^2 + \left(1 - \frac{m}{M}\right) E$$

em ordem a v e igualando essa derivada a zero encontra-se

$$v_1 = \frac{m}{m+M} \sqrt{\frac{2E}{m}} = \frac{m}{m+M} v_0, \quad (3)$$

sendo v_0 a velocidade inicial da partícula α . Notar que $\frac{d^2 f}{dv^2} < 0$, para $v=v_1$, pelo que o extremo de f é um máximo. Substituindo este valor de v_1 em $f(v)$ encontra-se

$$\begin{aligned} f(v_1) &= \frac{m}{M(m+M)} 2Em - \frac{1}{2} \frac{m}{(m+M)^2} \left(1 + \frac{m}{M}\right) 2Em + \left(1 - \frac{m}{M}\right) E \\ &= \frac{M}{m+M} E \end{aligned}$$

e a distância de aproximação máxima obtém-se inserindo este resultado em (2):

$$d = \frac{k_0 2Ze^2 (m+M)}{EM}.$$

A velocidade de recuo do núcleo de ouro no instante em que a distância de separação é mínima pode obter-se substituindo em (1) o valor de v dado por (3):

$$V_1 = \frac{1}{M} \left(mv_0 - \frac{m^2}{m+M} v_0 \right)$$

ou seja

$$V_1 = \frac{m}{m+M} v_0 = v_1.$$

No ponto de aproximação máxima as velocidades das duas partículas são iguais. Este resultado, se fosse usado logo de início, permitiria obter a distância de aproximação máxima sem necessidade de se derivar $f(v)$. A justificação física para o usar seria a seguinte: enquanto a velocidade da partícula alfa for maior do que a do ouro a distância entre as partículas ainda vai diminuindo; quando a velocidade do ouro for maior do que a da partícula alfa, a distância entre as partículas já está a aumentar e, consequentemente, a aproximação máxima já ocorreu.

d) A distância d' refere-se à situação em que a partícula α volta para trás, ou seja,

$$v_2 = 0.$$

De (1),

$$V_2 = \frac{\sqrt{2Em}}{M} = \frac{m}{M} v_0.$$

Inserindo em (1'),

$$E \left(1 - \frac{m}{M}\right) = k_0 \frac{2Ze^2}{d'}$$

e portanto

$$d' = \frac{k_0 2Ze^2 M}{E(M-m)} = \frac{M^2}{M^2 - m^2} d > d$$

- e) Por final da colisão entende-se a situação em que a interacção coulombiana já não tem significado e se tem, portanto, $f(v)=0$ em (2). Trata-se de uma equação do segundo grau em v :

$$(m+M)v^2 - 2\sqrt{2Em}v - \frac{2(M-m)}{m}E = 0$$

cujas soluções são

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} \frac{m \pm M}{m+M}$$

A solução com sinal positivo no numerador é $v=v_0$, ou seja é a velocidade inicial da partícula alfa (muito antes da interacção). A outra raiz, negativa,

$$v_3 = \sqrt{\frac{2E}{m}} \frac{m-M}{m+M} = -\frac{M-m}{m+M} v_0$$

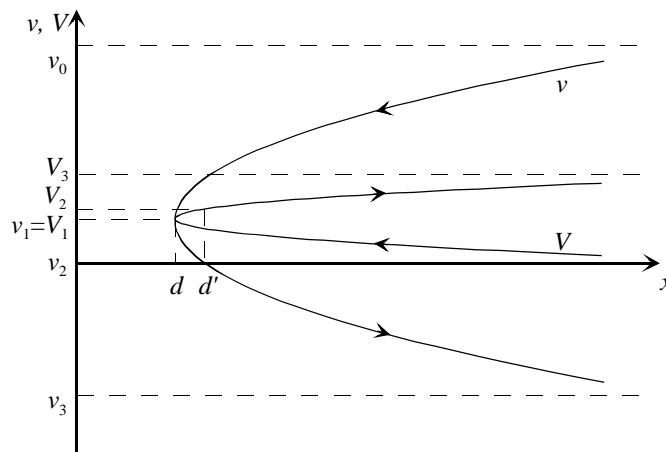
é a que corresponde à velocidade muito depois da colisão. A velocidade do núcleo de ouro é, então (de (1))

$$V_3 = \frac{1}{M} \left(\sqrt{2Em} + \sqrt{2Em} \frac{M-m}{m+M} \right)$$

e finalmente

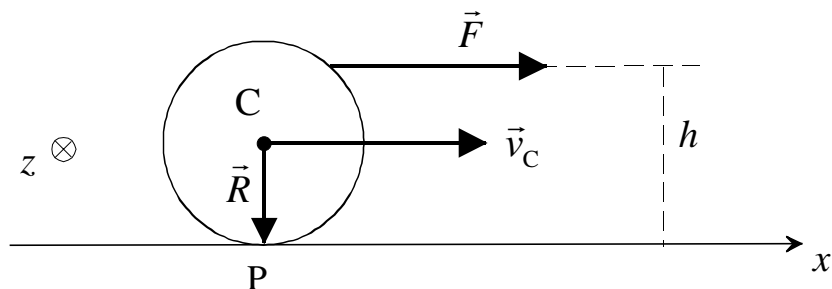
$$V_3 = \frac{2m}{m+M} \sqrt{\frac{2E}{m}} = \frac{2m}{m+M} v_0$$

- f) Para o gráfico considerou-se $M/m=5$. Na verdade, $M/m=197/4$.



III. Cilindro rolante

A figura representa um cilindro homogéneo de massa m e raio R sobre uma superfície horizontal. Designa-se por $\vec{\omega}$ a velocidade angular de rotação em torno do eixo do cilindro ($\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$, $\omega > 0$ se o cilindro rodar no sentido dos ponteiros do relógio). Aplica-se ao cilindro (que está inicialmente em repouso) uma força horizontal constante \vec{F} cujo ponto de aplicação se situa a uma altura h da superfície horizontal.



- Relacionar as velocidades lineares \vec{v}_P e \vec{v}_C dos pontos P, C (centro de massa) e a velocidade angular $\vec{\omega}$. Escrever a relação entre v_C e ω para que o cilindro role sem escorregar.
- Escrever as equações de movimento para a rotação e a translação do cilindro e obter uma expressão que relacione o valor da força de atrito, \vec{f} , com a altura h na situação em que o cilindro rola sem escorregar. Traçar o gráfico da função $f=f(h)$. Pode o cilindro rolar sem escorregar se não houver força de atrito?
- Obter o coeficiente de atrito mínimo em função da altura h , para que o cilindro role sem escorregar.
- Encontrar os possíveis pontos de aplicação da força \vec{F} e determinar os coeficientes de atrito cinético para que o cilindro não tenha movimento de rotação mas unicamente de translação.

III

- A equação que relaciona as velocidades é

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{R}$$

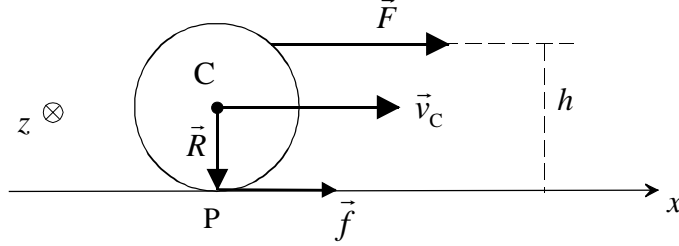
Projectando esta equação segundo o eixo x obtém-se $v_P = v_C - \omega R$. O cilindro rola sem escorregar quando o ponto P tem velocidade nula pelo que

$$v_C = \omega R \quad (1)$$

é a condição de rolamento sem escorregamento.

- b) Designando por a_C e por α as acelerações linear do centro de massa e angular em relação ao centro de massa e considerando as forças representadas na figura pode escrever-se:

$$\begin{aligned} F + f &= ma_C \\ F(h - R) - fR &= \frac{1}{2}mR^2\alpha \end{aligned} \quad (2)$$



Notas: a) a força de atrito aponta "tentativamente" para a direita. Só a resolução pormenorizada permitirá saber se aponta nesse sentido ou no sentido oposto; b) Utilizou-se em (2) o momento de inércia do cilindro em relação ao seu eixo, $I = \frac{1}{2}mR^2$; c) a primeira das eqs. (2) refere-se ao movimento do centro de massa e a segunda ao movimento de rotação em relação ao centro de massa; d) na figura não se indicam as forças verticais – força gravítica e reacção normal – que se anulam e que têm momentos nulos relativamente ao centro de massa.

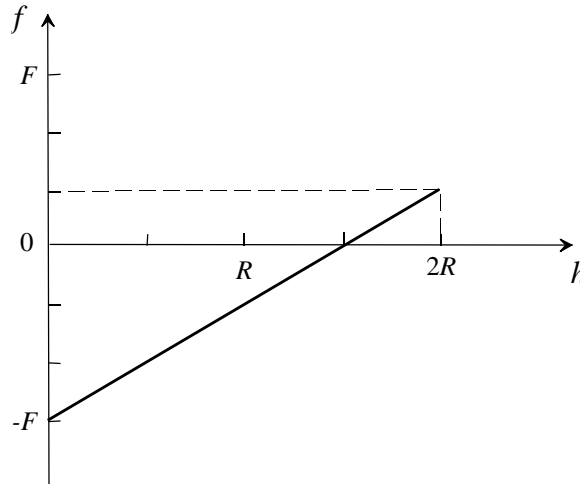
As eqs. (2) ainda se podem escrever

$$\begin{aligned} a_C &= \frac{F + f}{m} \\ \alpha R &= \frac{2}{mR} [F(h - R) - fR] \end{aligned} \quad (3)$$

Estas eqs. São válidas quer haja quer não haja deslizamento. Derivando a equação (1) em ordem ao tempo tem-se $a_C = \alpha R$ que, usada em (3), permite escrever

$$f = F \left(\frac{2h}{3R} - 1 \right) \quad (4)$$

No intervalo $0 \leq h \leq \frac{3}{2}R$, f é negativa, ou seja \vec{f} aponta na direcção oposta à indicada na figura anterior. Para $\frac{3}{2}R \leq h \leq 2R$, f passa a ser positiva. A figura seguinte mostra o valor da força de atrito em função da altura h .



Para $h = \frac{3}{2}R$ o cilindro rola sem deslizar, sendo nula a força de atrito.

- c) A força de atrito estático tem um valor máximo dado por $|f| \leq \mu mg$, sendo μ o coeficiente de atrito estático. Desta expressão e de (4) conclui-se que

$$\mu \geq \frac{F}{mg} \left| \frac{2h}{3R} - 1 \right|.$$

O valor mínimo do coeficiente de atrito para que haja rolamento sem escorregamento depende da altura é dado por

$$\mu_{\min} = \frac{F}{mg} \left| \frac{2h}{3R} - 1 \right|.$$

- d) Neste caso, $v_p = v_c$ e portanto $\omega = 0$. A aceleração angular também é nula, $\alpha = 0$, e da segunda das equações (3)

$$f = F \left(\frac{h}{R} - 1 \right). \quad (5)$$

Esta força de atrito é cinética, e tem de ser negativa pois $v_p > 0$. Logo a altura a que se aplica a força externa \vec{F} será necessariamente

$$\boxed{h < R}.$$

Esta é uma condição necessária para que o movimento seja puramente de translação. Por outro lado, a força de atrito cinética pode escrever-se $|f| = \mu_c mg$, sendo μ_c o coeficiente de atrito cinético. Desta expressão e de (5) obtém-se

$$\mu_c = \frac{F}{mg} \left(1 - \frac{h}{R} \right).$$

OLIMPIADAS DE FÍSICA

Seleccção para as provas internacionais

1 de Junho de 2001

1ª Prova Experimental

Duração da prova: 2h00

DETERMINAÇÃO DO MOMENTO DE INÉRCIA DE UMA BARRA

Material: 1 régua de madeira (100x10x1 cm) perfurada a intervalos regulares, papel milimétrico, fita métrica, cronómetro e suporte

Um pêndulo físico é um objecto extenso, de forma arbitrária, que pode rodar em torno de um eixo fixo. Um dos objectivos deste trabalho é determinar o momento de inércia em relação ao centro de massa de um pêndulo físico a partir da dependência do período de oscilação com a distância do ponto de suspensão ao centro de massa. O pêndulo físico será, neste caso, uma régua perfurada a intervalos regulares.

- a) Mostrar que, para oscilações de pequena amplitude, o período de oscilação T de um pêndulo físico de massa M suspenso por um ponto a uma distância l do seu centro de massa é:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{I}{Ml}}$$

em que g é a aceleração da gravidade e I é o momento de inércia do pêndulo *em relação ao eixo de rotação*.

- b) Suspender a régua por um dos seus furos e medir o período de oscilação. Repetir as medidas suspendendo a régua em diferentes pontos e apresentar os resultados numa tabela.
- c) Determinar a partir dos valores experimentais, para cada um dos valores de l , o momento de inércia da régua ($g=9,80\pm0,01 \text{ m/s}^2$) e indicá-lo acrescentando uma coluna à tabela anterior.
- d) Como se relaciona o momento de inércia em relação ao eixo de rotação com o momento de inércia em relação a um eixo paralelo ao eixo de rotação e que passa pelo centro de massa da régua?
- e) Representar num gráfico, em papel milimétrico, os valores de I em função de l^2 e de T em função de l .
- f) Determinar o momento de inércia I_0 da régua em relação a um eixo paralelo ao eixo de rotação e que passa pelo centro de massa. Comparar com o valor esperado ($I_0 = Md^2/12$, sendo d o comprimento da diagonal da face perpendicular ao eixo de rotação).
- g) Mostrar que para $l = d/\sqrt{12}$ o valor de T é mínimo. Comparar este valor teórico de l com os dados experimentais e calcular o valor de T_{\min} para a régua de madeira.

OLIMPIADAS DE FÍSICA

Seleccção para as provas internacionais

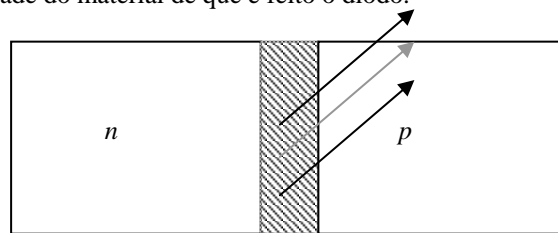
1 de Junho de 2001

2ª Prova Experimental

Duração da prova: 2h00

DÍODOS EMISSORES DE LUZ

Os díodos emissores de luz, também conhecidos por LEDs (da designação inglesa **Light Emitting Diode**), são dispositivos semicondutores bastante comuns. Este dispositivo emite luz quando os electrões transitam entre orbitais electrónicos de diferentes energias na junção entre dois tipos diferentes (n e p) de um dado material semicondutor (ver figura). A diferença de energia entre estas orbitais, ΔE , é uma propriedade do material de que é feito o díodo.



É necessário realizar um determinado trabalho W para forçar um electrão a atravessar a junção semicondutora. Para o efeito, a junção é polarizada com uma diferença de potencial V . Este trabalho é convertido, em grande parte, na energia dos fotões emitidos na junção. Na realidade, há pequenas perdas de energia, devidas ao efeito de Joule e outros processos que ocorrem no interior da junção, mas a energia “perdida” tem um valor praticamente constante para todos os LEDs de um mesmo tipo quando atravessados por uma mesma corrente eléctrica, desde que não se exceda um certo valor. Nestas condições, podemos escrever

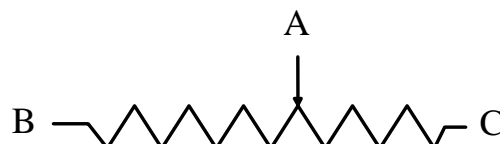
$$W = E_f + k$$

onde E_f é a energia dos fotões emitidos e k a constante que representa as (pequenas) perdas de energia sob outras formas. A luz emitida por um LED é praticamente monocromática. É possível fabricar LEDs que emitem luz de cores diferentes, alterando ligeiramente o material semicondutor. Por exemplo, os LEDs mais comuns são fabricados numa liga de Gálio, Arsénio e Alumínio. Alterando a concentração relativa de Gálio e Alumínio é possível fabricar LEDs que emitem praticamente todas as cores do espectro visível e também no infravermelho. Os LEDs de infravermelho são utilizados, por exemplo, nos telecomandos.

Material: 5 LEDs (das seguintes cores: azul, verde, laranja, vermelho e vermelho forte), potenciómetro de 4,7 k Ω , resistência de 1 k Ω , pilha de 4,5 V, fios de ligação, 2 multímetros, papel milimétrico

Atenção:

- Um LED, como qualquer díodo, só conduz a corrente eléctrica quando polarizado num dado sentido.
- **A corrente eléctrica que atravessa um LED não deverá nunca exceder 10 mA, sob pena de o danificar irreversivelmente. Para protecção, a resistência de 1 k Ω deverá estar PERMANENTEMENTE ligada em série com o LED.**
- Os multímetros deverão ser utilizados exclusivamente como voltímetros.
- O potenciómetro, que se mostra em esquema, permite obter nos terminais AB uma tensão variável entre 0 e a tensão aplicada aos terminais BC. No potenciómetro fornecido o cursor é o terminal do meio.



LED	λ (nm)
Azul	470
Laranja	592
Verde	524
Vermelho	???
Vermelho forte	626

Tabela 1

1. Com o material de que dispõe, estudar o comportamento eléctrico dos LEDs (dependência da intensidade da corrente, I , em função da tensão aplicada, V). Representar os dados sob a forma de tabela e em gráficos e fazer um esquema do circuito eléctrico que montou para realizar as medidas.
2. A partir dos resultados experimentais e dos dados da Tabela 1:
 - a) A partir dos gráficos $I(V)$ determinar a tensão V_{min} a partir da qual a corrente que atravessa o LED aumenta bruscamente.
 - b) Explicar porque é que o LED só emite luz para $V > V_{min}$. Relacionar V_{min} com o comprimento de onda da radiação emitida pelo LED.
 - c) Determinar o valor da constante de Planck, h .
 - d) Estimar o valor do comprimento de onda da luz emitida pelo LED vermelho.