

## P1 Patinagem/Patinação no gelo em Jaca (15 pontos)

Jaca tem sido por várias vezes sede dos Campeonatos Mundiais de Patinagem/Patinação Artística no gelo para profissionais. Suponha que um casal de patinadores participa nos exercícios de patinagem/patinação numa pista de gelo horizontal. As massas do rapaz e da moça são  $M_A = 75 \text{ kg}$  e  $M_B = 50 \text{ kg}$ , respectivamente.

A força de atrito entre os patins e a pista considera-se desprezável/desprezível em todas as/os alíneas/itens, excepto na/no alínea/item 1.b).

- 1) Num momento da sua exibição, os patinadores movem-se segundo uma mesma linha recta e no mesmo sentido, de forma que o rapaz, que se move com uma velocidade  $v_A = 8,0 \text{ m/s}$ , alcança a moça, cuja velocidade é  $v_B = 6,0 \text{ m/s}$ ; a partir deste momento passam a mover-se juntos.
  - 1.a) Calcule a velocidade dos patinadores quando se passam a mover juntos.
  - 1.b) Com esta velocidade, os patinadores cruzam os patins, aparecendo uma força de atrito, parando em 5,0 m. Calcule o coeficiente de atrito cinético,  $\mu_c$ , entre os patins e a pista. Calcule também o tempo de travagem/frenagem,  $t_f$ .
- 2) Noutro número da sua exibição movem-se segundo rectas/retas paralelas, separadas de 1,5 m, com velocidades de módulos iguais,  $v'_A = v'_B = 1,4 \text{ m/s}$ , e em sentidos opostos. Ao cruzarem-se, os patinadores estendem os braços e seguram-se pelas mãos, permanecendo unidos e mantendo a distância de 1,5 m entre eles.
  - 2.a) Considere o sistema formado pelos dois patinadores. Com que velocidade se move o centro de massa do sistema? Com que velocidade angular giram os patinadores em torno do seu centro de massa?
  - 2.b) Represente num esquema a trajectória de cada patinador em relação ao centro de massa do sistema.
  - 2.c) Calcule a energia cinética do sistema.
- 3) Após darem uma volta completa, os patinadores encolhem os braços, aproximando-se a uma distância de 1,0 m e, dessa forma, dão outra volta completa e separam-se, saindo na mesma direcção inicial.
  - 3.a) Determine a nova velocidade angular de rotação em torno do centro de massa antes de se soltarem.
  - 3.b) Calcule o trabalho realizado pelos patinadores no processo de aproximação relativa e a força média que os mesmos tiveram que exercer.
  - 3.c) Determine a velocidade de cada patinador em relação à pista depois de se soltarem.



## Solución

$$1.a) \quad M_A v_A + M_B v_B = (M_A + M_B) V \quad \boxed{V = 7,2 \text{ m/s}}$$

$$1.b) \quad \frac{1}{2} (M_A + M_B) V^2 = \mu_c (M_A + M_B) g L \quad \mu_c = \frac{V^2}{2gL} \quad \boxed{\mu_c = 0,53}$$

$$V_f = 0 = V - \mu_c g t_f \quad t_f = \frac{V}{\mu_c g} \quad \boxed{t_f = 1,39 \text{ s}}$$

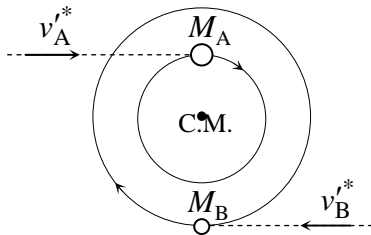
$$2.a) \quad M_A v'_A - M_B v'_B = (M_A + M_B) V' \quad \boxed{V' = 0,28 \text{ m/s}}$$

$$\left. \begin{array}{l} M_A r_A^* - M_B r_B^* = 0 \\ r_A^* + r_B^* = 1,5 \text{ m} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} r_A^* = 0,6 \text{ m} \\ r_B^* = 0,9 \text{ m} \end{array} \right\}$$

Conservación del momento angular respecto a un punto fijo en la trayectoria del c.d.m.:

$$M_A v'_A r_A^* + M_B v'_B r_B^* = I^* \omega \quad I^* = M_A r_A^{*2} + M_B r_B^{*2} = 67,5 \text{ kg m}^2 \quad \boxed{\omega = 1,87 \text{ rad/s}}$$

2.b)



$$2.c) \quad T = \frac{1}{2} I^* \omega^2 + \frac{1}{2} (M_A + M_B) V'^2, \text{ o bien } T = \frac{1}{2} (M_A + M_B) v'^2 \quad \boxed{T = 122,5 \text{ J}}$$

$$3.a) \quad \text{Conservación del momento angular: } I^* \omega = I'^* \omega'$$

Nuevas distancias al centro de masas:  $r_A'^* = 0,4 \text{ m} \quad r_B'^* = 0,6 \text{ m}$

$$I'^* = M_A r_A'^{*2} + M_B r_B'^{*2} = 30 \text{ kg m}^2 \quad \boxed{\omega' = 4,2 \text{ rad/s}}$$

$$3.b) \quad T' = \frac{1}{2} I'^* \omega'^2 + \frac{1}{2} (M_A + M_B) V'^2$$

$$W = T' - T \quad \boxed{W = 147 \text{ J}} \quad W = F \cdot 0,5 \text{ m} \quad \boxed{F = 294 \text{ N}}$$

$$3.c) \quad v_A'' = V' + \omega' r_A'^* \quad \boxed{v_A'' = 1,96 \text{ m/s}}$$

$$v_B'' = V' - \omega' r_B'^* \quad \boxed{v_B'' = -2,24 \text{ m/s}}$$



## P2 O grande condensador/capacitor do Instituto de Ciência de Materiais de Aragão (15 pontos)

A Figura 1 mostra o esquema de um condensador/capacitor plano com características diferentes das usuais. As placas têm uma área  $A = 1,40 \cdot 10^5 \text{ m}^2$  e estão separadas de uma distância  $d_0 = 0,100 \text{ mm}$ . Este condensador foi carregado com uma tensão de  $V = 7,10 \text{ kV}$ , sendo posteriormente desligado da fonte de tensão. Inicialmente existe ar entre as placas e a permitividade do ar é  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ C}^2$ .

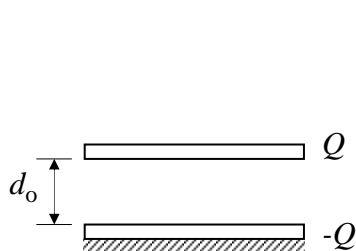


Figura 1

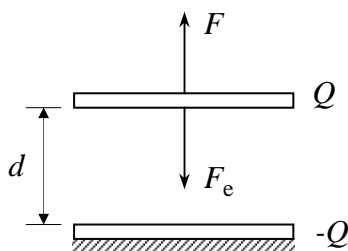


Figura 2

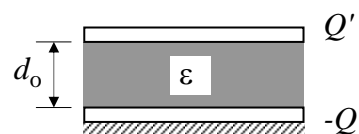


Figura 3

- 1) Calcule a carga  $Q$  das placas e o campo eléctrico/elétrico  $E$  entre elas.
- 2) Supondo que a placa inferior está fixa e que a placa superior é afastada para uma distância  $d > d_0$  (Figura 2), obtenha uma expressão para a energia eléctrica/elétrica,  $U(d)$ , armazenada no condensador/capacitor.
- 3) A partir da variação da energia eléctrica/elétrica entre os estados inicial (Figura 1) e final (Figura 2), determine a força  $F$  que deve ser exercida sobre a placa superior por forma a equilibrar a força eléctrica/elétrica de atracção/atracção,  $F_e$ , exercida pela placa inferior. Diga se  $F_e$  depende ou não de  $d$ .

A força  $F_e$  é bastante elevada, de forma que é difícil manter as duas placas separadas fazendo actuar/atuar continuamente a força  $F$ . Uma solução mais simples consiste em introduzir uma folha de papel isolante de espessura  $d_0$  entre as placas, o que impede a junção das mesmas (Figura 3). Ora, o papel apresenta uma permitividade  $\epsilon = 3,7\epsilon_0$ , o que muda as características electrostáticas/eletrostáticas do sistema. Suponha que a folha de papel é colocada no condensador antes de o carregar com a mesma fonte de tensão antes utilizada, desligando-o de seguida.

- 4) Calcule os novos valores da carga  $Q'$  das placas, do campo eléctrico/elétrico  $E'$  entre elas e da energia eléctrica/elétrica armazenada,  $U'$ .
- 5) Calcule a força de compressão  $F_e'$  a que está submetido o papel devido às forças electrostáticas/eletrostáticas.



**V OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE FÍSICA**  
**JACA, ESPAÑA      Septiembre de 2000**

## Solución

1) Carga de cada armadura:  $Q = \varepsilon_0 \frac{A}{d_0} V$

$$Q = 88,0 \text{ C}$$

Campo eléctrico (módulo):  $E = \frac{V}{d_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$

$$E = 7,10 \cdot 10^7 \text{ V/m}$$

2) Energía almacenada:  $U(d) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C(d)} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon_0 A / d}$

$$U(d) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon_0 A} d$$

3)  $U(d) - U(d_0) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon_0 A} (d - d_0) = F_e (d - d_0) \quad F = F_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon_0 A}$

$$F = 3,12 \cdot 10^9 \text{ N}$$

Nota:  $F_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon_0 A} = \frac{1}{2} QE$

El campo creado por una distribución plana e indefinida de carga es uniforme.  $F_e \neq f(d)$

4)  $Q' = \varepsilon \frac{A}{d_0} V = 3,70 Q$

$$Q' = 326 \text{ C}$$

$$V' = V \Rightarrow E' = E$$

$$U' = \frac{1}{2} Q' V = 3,70 U$$

$$U' = 1,16 \cdot 10^6 \text{ J}$$

5) En presencia del dieléctrico:  $U'(d) - U'(d_0) = \frac{Q'^2}{2\varepsilon A} (d - d_0) = F'_e (d - d_0)$

$$F'_e = \frac{Q'^2}{2\varepsilon A} = 3,70 F_e$$

$$F'_e = 1,15 \cdot 10^{10} \text{ N}$$

Nota: Um banco de condensadores que apresenta características similares à este condensador está instalado no Instituto de Ciência de Materiais de Aragão, em Zaragoza. Este centro de pesquisas, que depende do Conselho Superior de Pesquisas Científicas (CSIC) e da Universidade de Zaragoza, foi financiado, em parte pela Administração geral de Aragão. Estas instituições são também patrocinadoras da OlbF. As instalações deste Instituto estão sendo utilizadas atualmente para o estudo das propriedades magnéticas da matéria, através do uso de pulsos de corrente de alta intensidade, com dois segundos de duração, as quais alimentam uma bobina capaz de gerar um campo magnético de 30T.

## Propuesta de puntuación

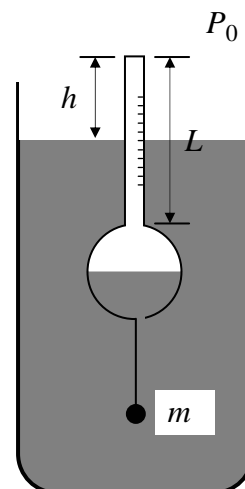
1)	2	pts
2)	3	pts
3)	4+1	pts
4)	2	pts
5)	3	pts



**P3 Um termómetro/termômetro flutuante (10 Pontos)**

O sistema da figura é um leve flutuador de vidro formado por um tubo cilíndrico, fechado na parte superior, ligado a um balão esférico, que tem uma abertura na sua parte inferior de modo que a água pode entrar e sair. O dispositivo tem uma pequena bola de chumbo presa por um fio de maneira que, nas condições de pressão atmosférica  $P_0 = 1,01 \cdot 10^5$  Pa e temperatura  $T_0 = 17,0^\circ\text{C}$ , flutua com o balão exactamente meio cheio de água, e metade do tubo emerge da água.

Dados: diâmetro do balão,  $D = 6,00$  cm; diâmetro e comprimento do tubo,  $d = 1,00$  cm,  $L = 10,0$  cm.



- 1) Calcule a massa  $m$  de chumbo necessária para que o termómetro/termômetro flutue nas condições descritas. Despreze a massa e a espessura das paredes do vidro, a massa do ar contido na câmara e a massa do fio que sustenta a bola de chumbo. Densidade do chumbo e da água:  $\rho_{\text{pb}} = 11,3 \text{ g/cm}^3$  e  $\rho = 1,00 \text{ g/cm}^3$ , respectivamente.
- 2) Calcule a pressão absoluta  $P_c$  na câmara de ar.

Está claro que, com a pressão atmosférica constante, um aumento da temperatura expandirá o ar da câmara e o sistema subirá um pouco. Teremos construído um termómetro/termômetro marcando uma escala na parede do tubo e medindo a altura  $h$  da parte do tubo que emerge da água.

- 3) Sendo a pressão atmosférica  $P_0$ , calcule a separação das marcas da escala do termómetro/termômetro para que fique graduado em graus Celsius. Para uniformizar a notação, designe o volume da câmara de ar por  $V_0$ , a pressão por  $P_c$  e a temperatura por  $T_0$ . Considere o ar como um gás perfeito.

## Solución

- 1) Volumen de agua desplazada:  $V_d = V_s + V_P$ ,

donde  $V_P$  es el volumen del lastre de Pb y  $V_s = \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 L$  es el volumen de la parte sumergida de la cámara de aire.

Empuje = peso de la bola de plomo:  $V_d \rho g = V_P \rho_P g$ .

Por tanto:  $V_P = \frac{\rho}{\rho_P - \rho} V_s$ .  $M = V_P \rho_P$   $M = 66,4 \text{ g}$

2)  $P_c = P_0 + \rho g \left(\frac{L}{2} + \frac{D}{2}\right)$   $P_c = 1,008 \text{ atm}$

3)  $PV = nRT$ . Número de moles de aire en la cámara:  $n = \frac{P_0 V_0}{RT_0}$

$$V_0 = \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 + \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 L \quad V_0 = 20,5 \pi \text{ cm}^3$$

A presión  $P_0$  y temperatura  $T$ , el volumen de la cámara es:  $V = n \frac{R}{P_0} T = \frac{V_0}{T_0} T$

Volumen del cilindro por encima de la superficie:  $\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 h = V - V_s = \frac{V_0}{T_0} T - V_s$

Como  $V_s$  es constante, a un incremento de temperatura  $\Delta T$  corresponde  $\Delta h = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{d}\right)^2 \frac{V_0}{T_0} \Delta T$

Con  $\Delta T = 1^\circ \text{C}$ , la separación de las marcas es  $\Delta h = 2,8 \text{ mm}$

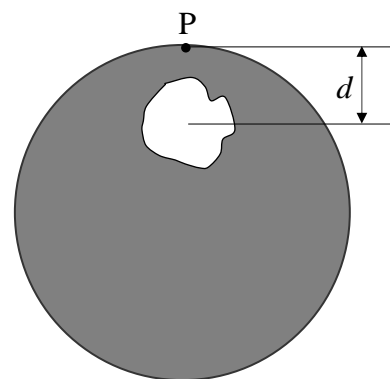
Nota: Este aparato é inspirado pelo famoso *diabrinho de Descartes*. Na prática tratase de mau termômetro pois, ainda que a temperatura permaneça constante, se a pressão atmosférica variar devido as variações meteorológicas, a câmara de ar se comprime ou se expande, o aparato submerge ou emerge e nos fornece uma leitura falsa. O resfriamento devido a evaporação da água seria também outra causa de erro.

## Classificação

- 1) 3 p.  
2) 2 p.  
3) 5 p.



Prospecções geofísicas indicam que a uma certa profundidade da crosta terrestre existe uma cavidade aproximadamente esférica com raio médio  $R = 2,1$  km. No seu interior supõe-se a existência de gás metano, cuja densidade é bastante inferior à da Terra. Uma medida precisa da gravidade no ponto P da superfície mais próximo da cavidade dá um valor  $g = 0,99997g_0$ , onde  $g_0$  seria o valor da gravidade em P supondo que a Terra é esférica e homogênea, de raio  $R_T = 6370$  km. Por simplicidade não leve em conta o efeito da rotação da Terra.



- 1) Estime a distância  $d$  entre o centro da cavidade e o ponto P da superfície terrestre.
- 2) Supondo agora que se pretende medir  $g$  com o uso de um pêndulo simples, e que se conhece com exactidão/exatidão o seu comprimento, calcular a precisão relativa,  $\Delta T/T$ , com que se deve medir o período para que se possa obter um valor de  $g$  com uma precisão  $\Delta g = 10^{-4}$  N/kg.



## Solución

### 1) Modelo:

Terra perfeitamente esférica e homogênea com uma cavidade vazia, também esférica, de raio  $R$  2,1 km, como mostra a figura. Aqui, considera-se que a cavidade apresenta-se vazia, uma vez que a densidade do gás é bastante inferior à da terra.

O campo gravitacional no ponto  $P$  da superfície será igual ao campo devido à terra como se esta fosse perfeitamente esférica e homogênea, com densidade média  $\rho$ , menos o campo criado pela cavidade, a qual se comporta como uma esfera homogênea de densidade negativa  $(-\rho)$ .

Assim:

$$g = g_0 - G \frac{\rho \frac{4}{3} \pi R^3}{d^2}, \quad \text{con} \quad g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2}. \quad \text{Como} \quad \rho = \frac{M_T}{\frac{4}{3} \pi R_T^3},$$

$$g = g_0 - G \frac{1}{d^2} \frac{M_T}{\frac{4}{3} \pi R_T^3} \frac{4 \pi R^3}{3} = g_0 - \left( G \frac{M_T}{R_T^2} \right) \frac{R^3}{R_T} \frac{1}{d^2} = \left( 1 - \frac{R^3}{R_T} \frac{1}{d^2} \right) g_0$$

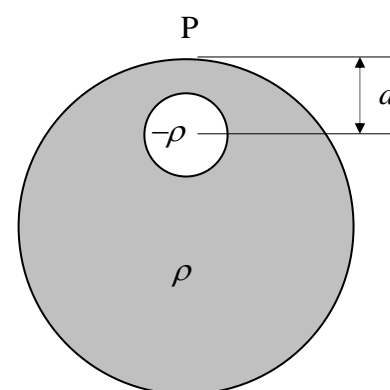
El dato que nos dan es  $g = 0,99997 g_0$ , luego

$$0,99997 = 1 - \frac{R^3}{R_T} \frac{1}{d^2},$$

y de aquí:

$$d = \left( \frac{R^3}{(1 - 0,99997) R_T} \right)^{1/2} \quad \boxed{d \approx 7 \text{ km}}$$

$$2) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow \frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g} = \frac{1}{2} \frac{5 \cdot 10^{-5}}{10} \quad \boxed{\frac{\Delta T}{T} = 2,5 \cdot 10^{-6}}$$



## Propuesta de calificación

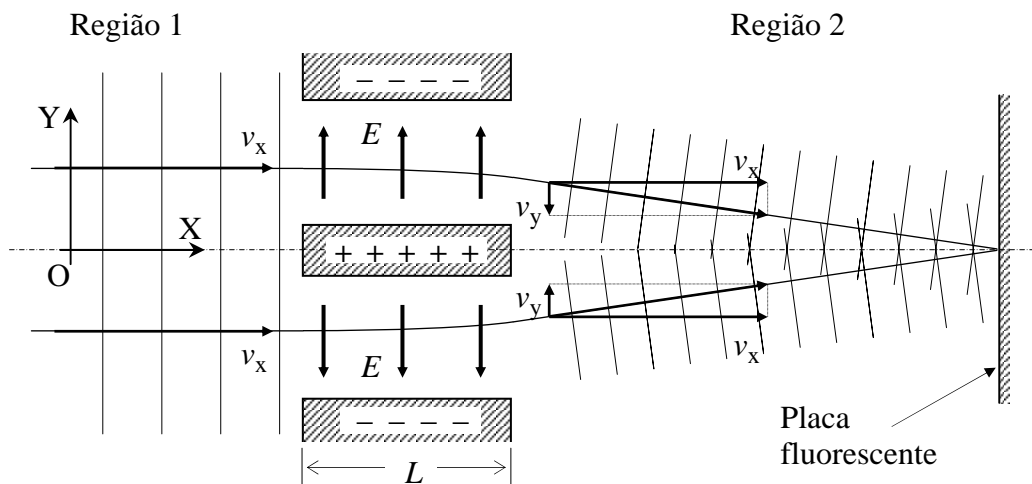
1) 7 p.

2) 3 p.



## P5 Interferência de electrões/elétrons (10 pontos)

A figura em baixo representa o aparelho construído por Möllenstedt e Düker nos anos cinquenta, com o objectivo/objetivo de demonstrar que os electrões/elétrons além de partículas também se comportam como ondas. Este aparelho é constituído basicamente por três placas planas carregadas, com um comprimento  $L$ , que criam campos eléctricos/elétricos uniformes de módulo  $E$  nos espaços entre elas, como mostra a figura. Pela esquerda das placas (região 1) incide um feixe colimado de electrões/elétrons, com uma velocidade  $v_x$  paralela às placas.



- 1) Calcule a componente transversal  $v_y$  da velocidade dos electrões/elétrons ao saírem das placas (região 2). Dados:  $L = 5,0 \text{ mm}$ ;  $E = 570 \text{ V/m}$ ;  $v_x = 1,24 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ;  $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ;  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ . Não é necessário o cálculo relativista.
- 2) O feixe de electrões/elétrons na região 1 pode ser considerado como uma onda plana. Sendo  $A$  a sua amplitude e  $k_x$  o número de onda ( $k_x = 2\pi/\lambda_1$ , sendo  $\lambda_1$  o comprimento de onda associado e  $p = \frac{h}{2\pi} k$ ), esta onda pode ser expressa num dado instante,  $t = 0$ , da seguinte forma:

$$\Phi_1(x) = A \cos(k_x x).$$

Na região 2 as duas ondas planas associadas aos electrões/elétrons desviados entre as placas sobrepoem-se. Dessa forma, em  $t = 0$  a onda resultante pode ser expressa como

$$\Phi_2(x, y) = A \{ \cos(k_x x + k_y y) + \cos(k_x x - k_y y) \}.$$

Determine  $k_x$  e  $k_y$ , na região 2.

Dado:  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$ .

- 3) Como mostra a figura, existe uma placa fluorescente, que brilha com intensidade proporcional à intensidade da onda electrónica/eletrônica que chega a cada um dos seus pontos. Nesta placa são detectadas linhas de interferência perpendiculares ao plano da figura. Obtenha uma expressão para a distribuição de intensidade na placa,  $I(y)$ , e determine a distância entre as linhas de interferência.

Nota:  $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

## Solución

$$1) \quad v_y = a_y \Delta t = \frac{eE}{m_e} \frac{L}{v_x} \quad \boxed{v_y = 4,04 \cdot 10^3 \text{ m/s}}$$

$$2) \quad \lambda_2 = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e \sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \quad k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{2\pi m_e \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}{h}$$

$$k_x = k_2 \cos \alpha = \frac{2\pi m_e v_x}{h} \quad \boxed{k_x = 1,07 \cdot 10^{12} \text{ m}^{-1}}$$

$$k_y = k_2 \sin \alpha = \frac{2\pi m_e v_y}{h} \quad \boxed{k_y = 3,49 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}}$$

$$3) \quad I(x, y) \propto |\Phi(x, y)|^2 = 4A^2 \cos^2(k_x x) \cos^2(k_y y)$$

Sobre la pantalla:  $I(y) \propto \cos^2(k_y y)$

$$I \text{ máxima para } \cos^2(k_y y) = 1 \Rightarrow k_y y_n = n\pi \Rightarrow y_n = n \frac{\pi}{k_y}$$

$$\text{Interfranja: } i = y_{n+1} - y_n = \frac{\pi}{k_y} = \frac{h}{2m_e v_y} = \frac{h v_x}{2eEL}; \quad \boxed{i = 90,0 \text{ nm}}$$

Nota histórica: somente ao final dos anos oitenta é que foram conseguidos sistemas de detecção suficientemente sensíveis para registrar a chegada de elétrons individuais à placas. Dessa forma, diminuindo-se a intensidade da fonte, os elétrons passam à chegar tão separados que assim se pode estar seguro de que cada elétron não sofre a interferência do elétron anterior ou do subsequente. Acumulando-se as chegadas, desde uma distribuição de impactos aparentemente aleatória ao princípio, pouco a pouco vão aparecendo as características linhas de interferência que ilustram de maneira impressionante como as “ondas” quânticas são amplitudes de probabilidade. Este êxito deve-se aos japoneses Tonomura e colaboradores (1988). Grupos da Universidade de Bolonha e de Tubina realizaram filmes da formação destas linhas de interferência.

## Classificação

- 1) 2 p.
- 2) 3 p.
- 3) 5 p.

