

# OLIMPIÁDAS DE FÍSICA

## Seleccção para as provas internacionais

19 de Maio de 2000

### Resolução da prova Teórica

*Duração da prova: 3H*

#### I. Vários tópicos

a) Da expressão  $F = G \frac{Mm}{R^2} = mg$ , onde  $R$  é o raio do planeta,  $M$  a sua massa e  $m$  a massa de um corpo na superfície, resulta

$$g = G \frac{M}{R^2}.$$

Por outro lado, a massa, o raio, e a densidade relacionam-se através de  $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$  o que permite concluir que  $g$  é proporcional a  $R\rho$  e escrever, portanto,

$$\frac{g_{\text{Lua}}}{g} = \frac{R_{\text{Lua}} \rho_{\text{Lua}}}{R_{\text{Terra}} \rho_{\text{Terra}}}.$$

Podemos concluir que

$$\frac{\rho_{\text{Lua}}}{\rho_{\text{Terra}}} = \frac{R_{\text{Terra}}}{R_{\text{Lua}}} \frac{g_{\text{Lua}}}{g} = \frac{1}{0,27} \frac{1}{6}$$

e, finalmente,

$$\boxed{\rho_{\text{Lua}} = 0,62 \rho_{\text{Terra}}}.$$

b) A equação da onda sinusoidal que se propaga da esquerda para a direita é:

$$\phi_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$$

onde  $\omega = vk$ . A equação da onda que se propaga da direita para a esquerda é

$$\phi_2(x, t) = A \sin(kx + \omega t)$$

A onda que resulta da sobreposição de  $\phi_1$  e  $\phi_2$  é

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = A[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)] = 2A \sin(kx) \cos(\omega t)$$

que é uma onda estacionária: a energia não se propaga através dos nodos  $N_1$ ,  $N_2$ , etc. (figura 1.1).

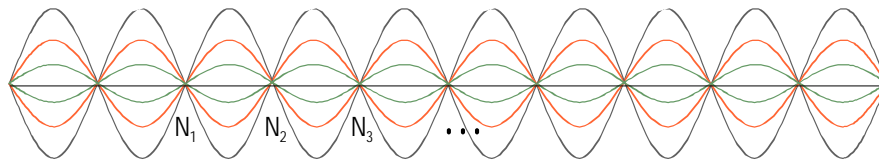


Figura 1.1

A equação dos nodos é  $kx = n\pi$ ,  $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ , ( $\phi$  é nulo para qualquer  $t$ ) ou seja,

$$x = \frac{n\pi}{k}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

c) Com o interruptor K aberto o circuito dado é equivalente ao que se mostra na figura 1.2.

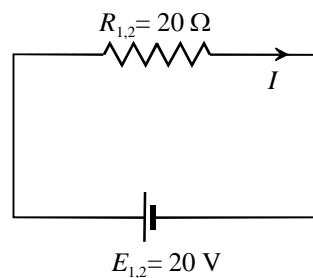


Figura 1.2

A corrente  $I$  é de 1 A. Na resistência  $R_3$  não passa corrente. Quando o interruptor está fechado podem aplicar-se as leis dos nodos e das malhas. Na figura 1.3 estão definidas duas malhas.

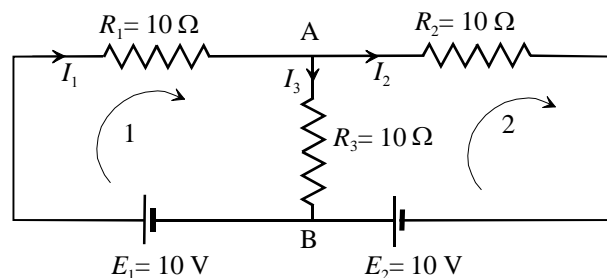


Figura 1.3

A lei dos nodos em A e a circulação nas malhas 1 e 2 (começando em B) permite escrever as seguintes equações:

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ -10 + 10I_1 + 10I_3 = 0 \\ -10I_3 + 10I_2 - 10 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ I_1 + I_3 = 1 \\ I_2 - I_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} I_1 = 1 \\ I_2 = 1 \\ I_3 = 0 \end{cases}$$

As correntes procuradas são

$$\boxed{I_1=I_2=1 \text{ A}, I_3=0 \text{ A}}.$$

Note-se, no entanto, que os alunos do 12º ano *não* sabem as leis dos nodos e das malhas (conhecem sim a lei de Ohm generalizada) pelo que não é previsível que resolvam a questão da forma apresentada. Mas podem argumentar do seguinte modo. Se entre A e B a resistência fosse zero (curto-circuito em vez de  $R_3$ , logo esses pontos estariam ao mesmo potencial), as malhas 1 e 2 seriam circuitos independentes. Da aplicação da lei de Ohm generalizada a cada circuito  $I_1=I_2=1 \text{ A}$ , concluindo-se então que entre A e B (resistência zero) não passa corrente. Mas antes, quando K estava aberto (resistência infinita entre A e B) também não passava corrente! Quer dizer, nunca passa corrente entre A e B qualquer que seja o valor da resistência  $R_3$  (entre zero e infinito). O valor indicado para  $R_3$  é, pois, irrelevante. Tal situação deve-se à simetria das malhas 1 e 2.

**d)** De  $R=\lambda N$  podemos concluir que a actividade em função do tempo segue uma lei idêntica a  $N$ , ou seja:

$$R = R_0 e^{-\lambda t}$$

Com  $R=13$  desintegrações por minuto e  $R_0=16$  desintegrações por minuto, e logaritmando ambos os membros da equação anterior obtém-se

$$t = \lambda^{-1} \ln\left(\frac{R_0}{R}\right) = \frac{10^4}{1,2} \ln\left(\frac{16}{13}\right),$$

ou seja

$$\boxed{t = 1730 \text{ anos}}.$$

**e)** A energia interna, que é uma grandeza extensiva, é aditiva:

$$\Delta U = (n_1 c_{v1} + n_2 c_{v2}) \Delta T$$

onde  $n_1$  e  $n_2$  são os números de moles dos gases monoatômico e diatômico e  $c_{v1}$  e  $c_{v2}$  são as respectivas capacidades térmicas molares a volume constante. Como a mistura é um gás ideal, também se pode escrever, para a mistura,

$$\Delta U = (n_1 + n_2) c_v \Delta T$$

onde  $c_v$  é a capacidade térmica molar a volume constante da mistura. Dividindo as duas equações membro a membro obtém-se

$$c_v = \frac{n_1 c_{v1} + n_2 c_{v2}}{n_1 + n_2}.$$

A capacidade térmica molar a volume constante da mistura é a média ponderada das capacidades térmicas molares a volume constante dos gases presentes. Substituindo valores,

$$n_1 = 2 \text{ mol}, n_2 = 1 \text{ mol}, c_{v1} = \frac{3R}{2}, c_{v2} = \frac{5R}{2},$$

encontra-se:

$$c_v = \frac{3R + \frac{5}{2}R}{3} = \frac{11}{6}R.$$

Para um gás ideal,  $c_P = c_v + R$ , pelo que  $c_P = \frac{17}{6}R$ . Finalmente,

$$\boxed{\gamma = \frac{c_P}{c_v} = \frac{17}{11}}$$

f) A lei de conservação da energia permite escrever

$$Mc^2 + h\nu = M^*c^2 + \frac{1}{2}M^*u^2,$$

onde  $u$  é a velocidade do núcleo excitado. Da conservação do momento linear,

$$\frac{h\nu}{c} = M^*u.$$

No espírito da aproximação não-relativista para a energia cinética, considera-se que  $M^*$  não varia com a velocidade. Substituindo  $u$ , dado pela segunda equação, na primeira equação, obtém-se a seguinte equação do segundo grau:

$$(M^*c^2)^2 - M^*c^2(Mc^2 + h\nu) + \frac{1}{2}(h\nu)^2 = 0,$$

de onde se obtém

$$M^*c^2 = \frac{Mc^2 + h\nu \pm \sqrt{(Mc^2)^2 + 2Mc^2h\nu - (h\nu)^2}}{2};$$

como  $Mc^2 > h\nu$ , só importa a raiz positiva:

$$\boxed{M^*c^2 = \frac{Mc^2 + h\nu + \sqrt{(Mc^2)^2 + 2Mc^2h\nu - (h\nu)^2}}{2}}.$$

No limite  $Mc^2 \gg h\nu$ , tem-se  $M^* = M$ .

## II. Electromagnetismo

**a.1)** A força que uma carga  $q$  exerce sobre uma carga  $q'$  separadas de uma distância  $d$  é dada pela lei de Coulomb:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{d^2}.$$

Na situação apresentada, cada uma das cargas negativas está sujeita a duas forças, ambas na direcção radial: a que é exercida pela distribuição de carga positiva (força atractiva, que aponta para o centro, que designamos por  $F_+$ ); e a que é exercida pela outra carga negativa (força repulsiva, que aponta para o exterior, que designamos por  $F_-$ ). A força repulsiva é dada, de acordo com a lei de Coulomb, por

$$F_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{4r^2}.$$

A força exercida pela distribuição de carga positiva é dada por

$$F_+ = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ'}{r^2}$$

onde  $Q'$  é a carga positiva contida numa esfera de raio  $r$  (o sinal  $-$  indica que a força aponta para o centro). De acordo com a lei de Gauss, o campo eléctrico criado pela distribuição uniforme de carga positiva no ponto onde está a carga negativa é radial e igual ao que seria produzido pela carga pontual  $Q'$  localizada no centro da distribuição. A densidade uniforme de carga na esfera de raio  $R$  encontra-se dividindo a carga total da esfera,  $2Q$ , pelo volume,  $\frac{4}{3}\pi R^3$ . A carga  $Q'$  é, pois,

$$Q' = \frac{2Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2Qr^3}{R^3}.$$

Substituindo na expressão de  $F_+$  obtém-se

$$F_+ = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q^2}{R^3} r.$$

Da condição de equilíbrio,  $F_+ + F_- = 0$  resulta

$$\frac{Q^2}{4r^2} = \frac{2Q^2 r}{R^3}$$

donde

$$\boxed{r = \frac{R}{2}}.$$

**a.2)** Convém desde logo reconhecer que a posição de equilíbrio que se acabou de determinar corresponde a um equilíbrio *estável*. Na verdade, se um electrão se afastar do centro aumenta sobre ele a força atractiva (pois aumenta  $r$  e  $F_+$  é linear em  $r$ ) e diminui a força repulsiva (pois o electrão fica mais longe do outro electrão). Ambos os efeitos contribuem para que a partícula fique sujeita a uma força atractiva que a tende a fazer regressar à posição de equilíbrio. Se  $r$  diminui aplicam-se os mesmos argumentos para concluir que a força aponta agora para fora.

Para estudar as pequenas oscilações radiais em torno da posição de equilíbrio, faz-se

$$r = \frac{R}{2} + \delta,$$

introduz-se esta expressão na da força resultante  $F = F_+ + F_-$ , e "lineariza-se" esta força (relativamente a  $\delta$ ). Assim,

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{4\left(\frac{R}{2} + \delta\right)^2} - \frac{2}{R^3} \left(\frac{R}{2} + \delta\right) \right) \quad (\text{A})$$

Usando o facto de  $\delta \ll R/2$ , podemos escrever

$$\left(\frac{R}{2} + \delta\right)^2 \approx \frac{R^2}{4} + R\delta$$

de acordo com a nota matemática  $(a+b)^2 \approx a^2 + 2ab$ , se  $b \ll a$  apresentada no enunciado. O primeiro termo dentro no parêntesis na expressão da força (A) pode então escrever-se

$$\frac{1}{4\left(\frac{R}{2} + \delta\right)^2} \approx \frac{1}{R^2 + 4R\delta} = \frac{1}{R^2} \frac{1}{1 + \frac{4\delta}{R}} \approx \frac{1}{R^2} \left(1 - \frac{4\delta}{R}\right)$$

A última igualdade escreve-se utilizando a outra nota matemática fornecida no enunciado:  $1/(1+x) \approx 1-x$  se  $x \ll 1$  (e tem-se, de facto,  $4\delta \ll R$ ).

Usando o resultado anterior na expressão (A), obtém-se

$$F \approx \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{4\delta}{R^3} - \frac{1}{R^2} - \frac{2\delta}{R^3} \right) = -\frac{6Q^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \delta.$$

A partir desta expressão que estabelece uma relação linear entre a força,  $F$ , e o deslocamento,  $\delta$ , podemos identificar a constante elástica:

$$k \approx \frac{6Q^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

e a frequência angular para as pequenas oscilações é  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , onde  $m$  é a massa do electrão, pelo que

$$\omega = \sqrt{\frac{6Q^2}{4\pi\epsilon_0 R^3 m}}$$

**b.1)** O campo de indução magnética produzido por um fio infinito percorrido por uma corrente  $I_0$  a uma distância  $r$  é

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \vec{e}_\phi \quad (A)$$

onde  $\vec{e}_\phi$  é um versor em coordenadas cilíndricas. O campo de indução magnética produzido pela corrente 1 em qualquer ponto da corrente 2 é

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\sqrt{2}\pi d} \vec{e}_y$$

sendo  $\vec{e}_y$  o versor na direcção do eixo  $y$  referido no enunciado.

De acordo com a lei de Laplace, a força (infinitesimal) que se exerce sobre o elemento  $d\vec{l}$  de um fio condutor percorrido pela corrente  $i$  na presença de um campo  $\vec{B}$  é

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B}$$

Para a corrente 2,  $i = I_0$  e  $d\vec{l} = -dz \vec{e}_z$ . A força sobre cada elemento de comprimento infinitesimal de 2 é então

$$d\vec{F} = -\frac{\mu_0 I_0^2}{2\sqrt{2}\pi d} dz \vec{e}_z \times \vec{e}_y = \frac{\mu_0 I_0^2}{2\sqrt{2}\pi d} dz \vec{e}_x$$

Trata-se de uma força repulsiva (em 2 aponta na direcção positiva do eixo  $x$ ). A grandeza da força que a corrente 1 exerce por unidade de comprimento do fio 2 é

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\mu_0 I_0^2}{2\sqrt{2}\pi d}$$

**b.2)** Os campos de indução magnética produzidos em C por cada corrente são [ver equação (A) acima]:

$$\begin{aligned}\vec{B}_1 &= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi d} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y \right) \\ \vec{B}_2 &= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi d} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y \right) \\ \vec{B}_3 &= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi d} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y \right) \\ \vec{B}_4 &= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi d} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y \right)\end{aligned}$$

O campo resultante,  $\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i$ , é

$$\vec{B} = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I_0}{\pi d} \vec{e}_y$$

**b.3)** A normal ao quadrado delimitado pela espira,  $\vec{e}_n$ , varia no tempo de acordo com a expressão (ver figura 2.1)

$$\vec{e}_n(t) = -\sin \theta(t) \vec{e}_x + \cos \theta(t) \vec{e}_y$$

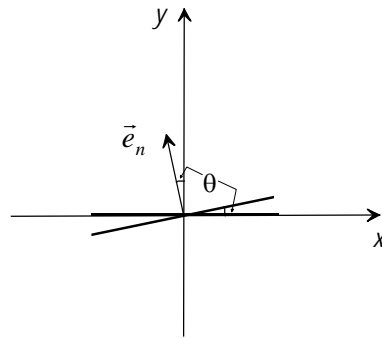


Figura 2.1

O fluxo do campo de indução magnética através da superfície plana limitada pela espira é (admite-se que o campo de indução magnética é constante em todos os pontos dessa superfície de área  $l^2$ )

$$\phi = l^2 \vec{B} \cdot \vec{e}_n = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I_0 l^2}{\pi d} \cos \theta(t) = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I_0 l^2}{\pi d} \cos[\theta_0 \sin(\omega t)]$$

A força electromotriz,  $E$ , é o simétrico da derivada temporal deste fluxo,  $E = -\frac{d\phi}{dt}$ , obtendo-se

$$E = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I_0 l^2}{\pi d} \theta_0 \omega \sin[\theta_0 \sin(\omega t)] \cos(\omega t).$$

### III. Mecânica

a) A velocidade de cada ponto do aro relativamente ao referencial do centro de massa,  $\vec{v}'$ , é, em módulo, igual à velocidade do centro de massa. A sua direcção é tangente à circunferência, tendo-se

$$\vec{v}' = v_{\text{CM}} (\sin \theta \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_y).$$

No referencial do laboratório, a esta velocidade, soma-se a velocidade do centro de massa:

$$\vec{v} = v_{\text{CM}} [(1 + \sin \theta) \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_y]$$

A velocidade é máxima no ponto mais alto do aro ( $\theta = \pi/2$ ):  $\vec{v} = 2v_{\text{CM}} \vec{e}_x$ . No ponto em contacto com o solo ( $\theta = 3\pi/2$ ) a velocidade  $\vec{v}$  é nula.

b.1) Actuam quatro forças (figura 3.1): o peso,  $\vec{P}$ , a tensão,  $\vec{T}$ , a reacção normal,  $\vec{R}$ , e a força de atrito,  $\vec{F}_a$ . As forças têm as direcções e sentidos indicados. Contudo, não é possível, nesta fase, determinar se a força de atrito (estático, sublinhe-se), tem o sentido indicado ou o oposto. Só a análise mais aprofundada da situação [alínea b.3)] permitirá concluir que o sentido indicado é o correcto.

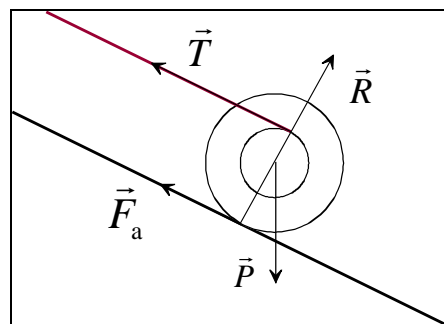


Figura 3.1

b.2) Como o ioiô rola sem escorregar o ponto de contacto com o plano inclinado é um ponto de repouso instantâneo. Relativamente a esse ponto (ou melhor, ao eixo horizontal que passa por esse ponto) o ioiô só tem movimento de rotação. O momento de inércia em relação a esse eixo é, de acordo com o teorema de Steiner,

$$I_2 = 4MR^2 + \chi MR^2 = (4 + \chi)MR^2.$$



Designemos por  $\alpha_2$  a aceleração angular do ioiô em relação a esse eixo de rotação e por  $\alpha_1$  a aceleração da roldana relativamente ao seu eixo. Sendo  $I_1 = \xi MR^2$  o momento de inércia da roldana podemos escrever relativamente ao seu movimento de rotação (arbitra-se sentido positivo o da rotação no sentido horário, e portanto o momento é positivo quando é perpendicular ao papel e aponta para dentro):

$$3RT = \alpha_1 I_1$$

A aceleração angular do ponto P (ver figura 3.2) é  $a_p = 3R\alpha_1$ , pelo que

$$9R^2T = a_p \xi MR^2 \Leftrightarrow 9T = a_p \xi M \quad (A)$$

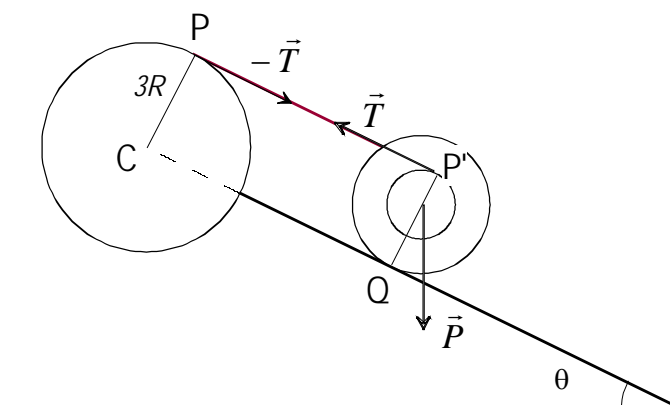


Figura 3.2

Quanto à rotação do ioiô em torno do eixo que passa por Q, tem-se

$$-3RT + 2RMg \sin \theta = \alpha_2 I_2$$

Substituindo  $T$  dado pela expressão (A), usando a expressão acima para  $I_2$  e notando que a aceleração de  $P'$  é igual à de  $P$  e portanto  $a_{P'} = a_P = 3R\alpha_2$ , vem

$$-a_p \xi + 6g \sin \theta = a_p(4 + \chi)$$

donde

$$a_p = \frac{6g \sin \theta}{4 + \chi + \xi} \quad (B)$$

Esta é a aceleração do ponto  $P'$  (que dista  $3R$ ) do eixo de rotação. A aceleração do centro de massa do ioiô (que dista  $2R$  de  $Q$ ) é  $\frac{2}{3}a_p$ :

$$\boxed{a_{\text{CM}} = \frac{4g \sin \theta}{4 + \chi + \xi}}.$$

Nota: o problema poderia ser resolvido considerando a rotação do ioiô em relação ao seu centro de massa e a translação do centro de massa.

**b.3)** A tensão  $T$  obtém-se directamente de (A) e de (B):

$$T = \frac{2\xi Mg \sin \theta}{3(4 + \chi + \xi)}.$$

Para calcular a força de atrito considere-se agora o movimento de translação do ioiô. A equação fundamental da dinâmica escreve-se (a força de atrito escreve-se simplesmente  $F_a$ : se resultar positiva aponta no sentido descendente; se negativa no sentido ascendente)

$$-T + P \sin \theta + F_a = Ma_{\text{CM}}$$

Usando os resultados acima obtidos para a tensão e para a aceleração do centro de massa, obtém-se

$$F_a = \frac{2\xi Mg \sin \theta}{3(4 + \chi + \xi)} - Mg \sin \theta + \frac{4Mg \sin \theta}{4 + \chi + \xi}$$

donde

$$F_a = -\frac{\xi + 3\chi}{3(4 + \chi + \xi)} Mg \sin \theta.$$

O sinal negativo nesta expressão indica que a força de atrito é no sentido ascendente do plano inclinado (como se representa na figura 3.1).

**b.4)** Considere-se que o ioiô parte do repouso e o seu centro de massa percorre uma distância  $d$ . A variação da energia potencial do sistema é unicamente a variação da energia potencial do ioiô já que a roldana só roda. Essa variação é

$$\Delta E_p = -Mgd \sin \theta$$

Por outro lado, a variação de energia cinética é igual à soma das energias cinéticas da roldana e do ioiô depois de este ter percorrido a distância  $d$ . O tempo que demora a percorrer esta distância é

$$t = \sqrt{\frac{2d}{a_{\text{CM}}}}$$

Ao fim deste tempo a velocidade angular da roldana é  $\omega_1 = t \times \alpha_1$  e a energia cinética de rotação da roldana é  $[ \alpha_1 = a_p / (3R) ]$

$$E_{c1} = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} \xi MR^2 \frac{2d}{\frac{4g \sin \theta}{4 + \chi + \xi}} \frac{\left( \frac{6g \sin \theta}{4 + \chi + \xi} \right)^2}{9R^2} = \frac{Mgd\xi \sin \theta}{4 + \chi + \xi}$$

Considerando a velocidade de rotação do ioiô em torno de Q ao fim do tempo  $t$ ,  $\omega_2 = t \times \alpha_2$ , e porque relativamente a esse ponto só há rotação, a energia cinética do ioiô resulta igual a

$$E_{c2} = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{Mgd(4 + \chi) \sin \theta}{4 + \chi + \xi}$$

A variação da energia cinética do conjunto roldama mais ioiô é

$$\Delta E_c = E_{c1} + E_{c2} = Mgd \sin \theta$$

verificando-se, portanto,

$$\Delta E_c + \Delta E_{cp} = 0,$$

ou seja, a energia mecânica conserva-se.