

30ª Olimpíada Internacional de Física

Pádua, Itália

Prova experimental

Terça-Feira, 20 de Julho de 1999

Antes de montar o equipamento para a experiência leia todo o texto do problema!

Leia isto primeiro:

1. O tempo disponível para a prova (uma experiência) é de 5 horas.
2. Usar apenas a caneta fornecida.
3. Usar apenas a **página da frente** das folhas fornecidas.
4. Além das folhas em branco onde poderá escrever livremente, há um conjunto de *Folhas de Respostas* onde **deverá** resumir os resultados obtidos. Os resultados numéricos devem ser dados com o número correcto de algarismos significativos; não esquecer as unidades. Tentar – sempre que possível – estimar incertezas experimentais.
5. Escrever nas folhas “em branco” os resultados de todas as medições e tudo o que considerar importante para a resolução do problema e que ache que deva ser considerado para correcção. No entanto, deverá usar principalmente equações, números, símbolos, gráficos, figuras, e o *mínimo de texto possível*.
6. É **obrigatório** escrever no cima de *cada* folha que usar: o nome (“**NAME**”), o país (“**TEAM**”), o código de estudante (tal como indicado no seu cartão de identificação olímpico, “**CODE**”); e ainda nas folhas “em branco”: a numeração sequencial de cada folha (de 1 a *N*, “**Page n.**”) e o número total (*N*) de folhas “em branco” que usou (“**Page total**”); deixe o campo “**Problem**” em branco. Escrever o número da questão a que está a responder no início de cada resposta. Se usar folhas de rascunho que não queira que sejam vistas pelo corrector, ponha uma grande cruz sobre toda a folha e não a numere.
7. Quando acabar a prova, entregue todas as folhas por ordem (primeiro folhas de resposta, depois folhas utilizadas por ordem, folhas não utilizadas e por fim o enunciado do problema) e ponha dentro do envelope original; deixe tudo sobre a mesa. Não lhe é permitido levar o que quer que seja da sala.

Este enunciado tem 11 páginas (incluindo esta e as folhas de resposta).

Este problema foi preparado pelo Comité Científico da 30ª IPhO, que inclui professores das Universidades de Bolonha, Nápoles, Turim e Trieste.

Pêndulo de torsão

Nesta experiência estuda-se um sistema mecânico interessante – um pêndulo de torsão – e investigam-se os seus principais parâmetros. Este pêndulo proporciona um exemplo simples do que se chama bifurcação quando o eixo de rotação está no plano horizontal.

Material

1. Um pêndulo de torsão, consistindo de uma parte externa (que não é homogênea longitudinalmente) e de uma barra com rosca; quadro-suporte que servirá para montar o pêndulo tal como mostra a figura 1
2. Um fio de aço com uma argola
3. Uma porca hexagonal comprida que pode ser aparafusada na ponta da barra com rosca do pêndulo (esta porca só vai ser precisa para a última questão)
4. Uma régua e um esquadro
5. Um cronómetro
6. Chaves hexagonais em forma de L
7. Folhas de papel milimétrico formato A3
8. Um grampo de fixação ajustável
9. Fita adesiva
10. Uma peça metálica em forma de T.

O sistema experimental está representado na figura 1; é um pêndulo de torsão que pode oscilar quer em torno de um eixo de rotação horizontal quer em torno de um eixo de rotação vertical. O eixo de rotação é definido por um fio de aço mantido sob tensão. O pêndulo tem duas partes; uma parte é uma barra com rosca, que enrosca na outra parte do pêndulo, e que pode ser fixada com uma pequena porca hexagonal. A barra com rosca **não** pode ser totalmente desenroscada da outra parte.

Quando montar o instrumento (na questão 5) o fio de aço deve passar por debaixo dos suportes de fixação no quadro de alumínio e pelo buraco no pêndulo. Quando chegar a este ponto comece por fixar o fio muito bem num dos suportes e depois, enquanto puxa pela argola para ter o fio sob tensão, aperte bem com a chave o outro suporte de modo a que o fio fique bem fixo.

Atenção: o fio deve ficar sob tensão mas não é necessário puxar com uma força que exceda cerca de 30 N. Puxa o fio a direito sem o dobrar na esquina do suporte pois o fio pode partir.

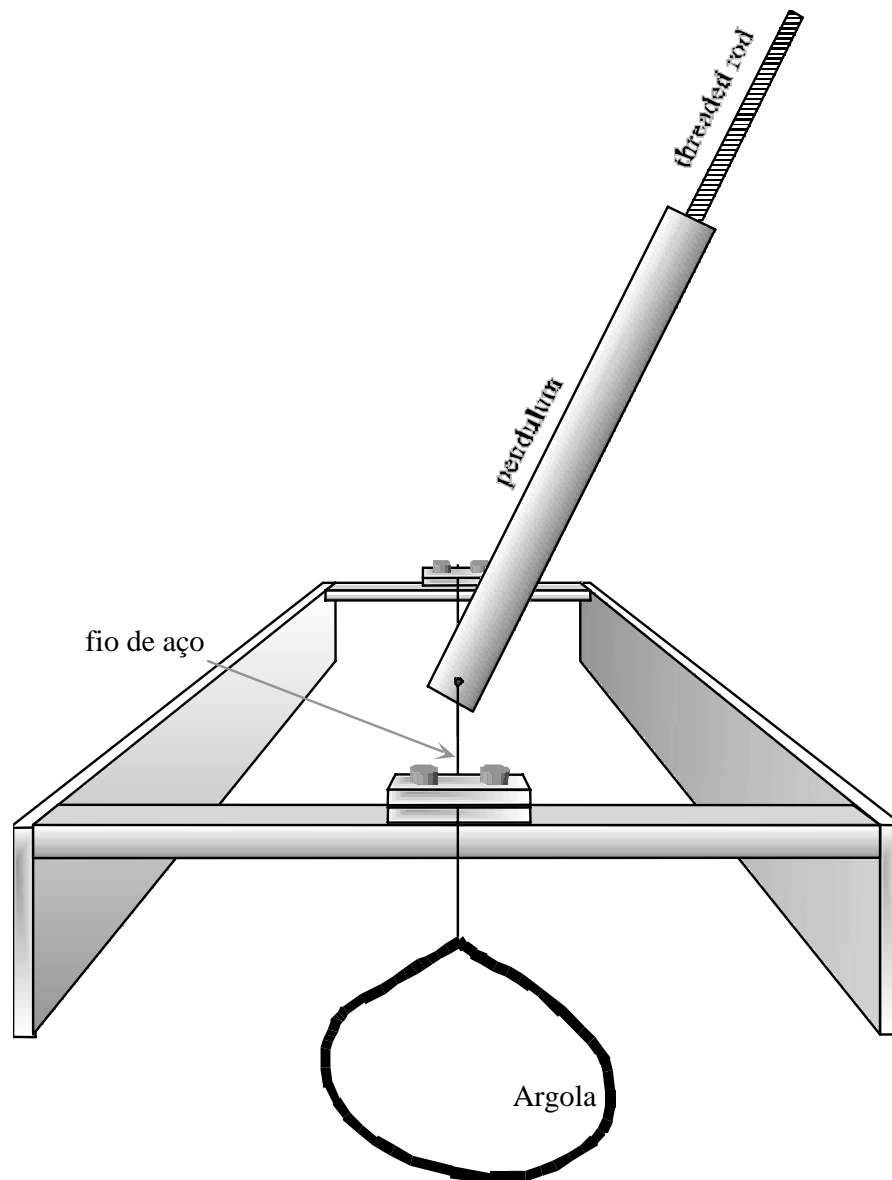


Figura 1: esquema do dispositivo experimental quando o eixo de rotação é horizontal.

As variáveis que caracterizam as oscilações do pêndulo são:

- a posição do pêndulo definida pelo ângulo θ que o pêndulo faz com a direcção perpendicular ao plano do quadro-suporte, que na figura 1 está na horizontal.
- a distância x entre o buraco do pêndulo por onde passa o fio e a extremidade da barra com rosca.
- período T das oscilações do pêndulo.

Os parâmetros adicionais que caracterizam o sistema são:

- a constante elástica de torsão, κ , do fio de aço (torque ou momento das forças = $\kappa \times$ ângulo)
- as massas M_1 e M_2 das duas partes do pêndulo (1: parte exterior cilíndrica¹, onde enrosca a outra parte; e 2: a barra com rosca)

¹ Incluindo a pequena porca hexagonal de aperto.

- as distâncias R_1 e R_2 do centro de massa de cada uma das partes do pêndulo (1: parte exterior cilíndrica, onde enrosca a outra parte; e 2: a barra com rosca) relativamente ao buraco por onde passa o eixo de rotação. Neste caso, a parte móvel do pêndulo (a barra com rosca) é suficientemente homogênea para calcular R_2 a partir da sua massa, do seu comprimento ℓ e da distância x . A distância R_2 é então uma função simples dos outros parâmetros;
- os momentos de inércia I_1 e I_2 das duas partes do pêndulo (1: o cilindro com o furo; e 2: a barra com rosca). Neste caso, supõe-se também que a parte móvel (a barra com rosca) é suficientemente uniforme para se calcular I_2 a partir da sua massa, do seu comprimento ℓ e da distância x . Também I_2 é então uma função dos outros parâmetros.
- a posição angular θ_0 (medida entre a direcção do pêndulo e a direcção perpendicular ao plano do quadro-suporte) de equilíbrio quando o torque ou momento restaurador elástico é zero. A fixação do pêndulo ao fio de aço é feita apertando um pequeno parafuso; este parafuso aperta-se com a chave em L e pode estar escondido no interior do pêndulo). O ângulo θ_0 varia de cada vez que se monta o sistema.

Em suma, o sistema é descrito por sete parâmetros: κ , M_1 , M_2 , R_1 , I_1 , ℓ e θ_0 , mas θ_0 muda de cada vez que o sistema é montado, pelo que só os outros seis são realmente constantes e o objectivo da experiência é a sua determinação, quer dizer o objectivo é a determinação **experimental** de κ , M_1 , M_2 , R_1 , I_1 e ℓ . Notar bem que a parte com rosca do pêndulo não se consegue separar totalmente da outra parte onde enrosca e, inicialmente, é apenas dada a massa total M_1+M_2 (está indicada no pêndulo).

Nesta experiência muitas quantidades são funções lineares de uma variável e deverá encontrar os parâmetros das rectas dos ajustes que fizer (são igualmente aceitáveis outras aproximações em vez dos ajustes lineares). Os erros experimentais dos parâmetros das rectas podem ser obtidos a partir do ajuste linear ou a partir da dispersão dos dados experimentais relativamente à recta de ajuste.

A análise da situação exige ainda uma fórmula simples para o momento de inércia da parte do pêndulo com rosca (considera-se que as dimensões da secção recta transversal são muito menores do que o comprimento, ver figura 2):

$$I_2(x) = \int_{x-\ell}^x \lambda s^2 ds = \frac{\lambda}{3} (x^3 - (x-\ell)^3) = \frac{\lambda}{3} (3\ell x^2 - 3\ell^2 x + \ell^3) \quad (1)$$

onde $\lambda = M_2 / \ell$ é a densidade linear de massa e portanto a expressão a usar é:

$$I_2(x) = M_2 x^2 - M_2 \ell x + \frac{M_2}{3} \ell^2 \quad (2)$$

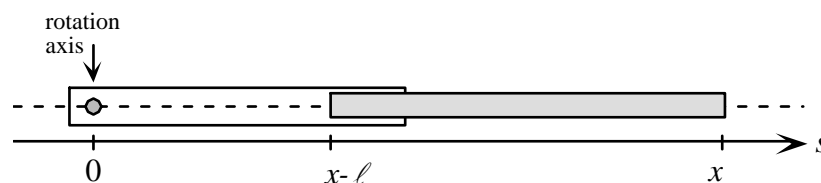


Figura 2: na análise da experiência podemos usar a eq. (2) para o momento de inércia de uma barra cujas dimensões da secção transversal sejam muito menores do que o seu comprimento. O momento de inércia deve ser calculado em torno do eixo de rotação que, nesta figura, está em $s=0$.

Segue agora os passos seguintes para determinar os 6 parâmetros M_1 , M_2 , κ , R_1 , ℓ , I_1 :

1. O valor total da massa $M_1 + M_2$ é dado (encontra-se impresso no pêndulo), e pode encontrar-se o valor das massas M_1 e M_2 medindo a distância $R(x)$ entre o eixo de rotação e o centro de massa do pêndulo. Para o efeito, escrever em primeiro lugar a equação que relaciona $R(x)$ em função de x e dos parâmetros M_1 , M_2 , R_1 e ℓ . [0,5 ponto]
2. Medir agora $R(x)$ para um conjunto de vários valores de x (pelo menos 3)². Ter em atenção que estas medidas devem ser realizadas antes da montagem do pêndulo no suporte, ou seja, antes de o prender ao fio. Com estas medidas e a equação encontrada no ponto anterior determinar M_1 e M_2 . [3 pontos]

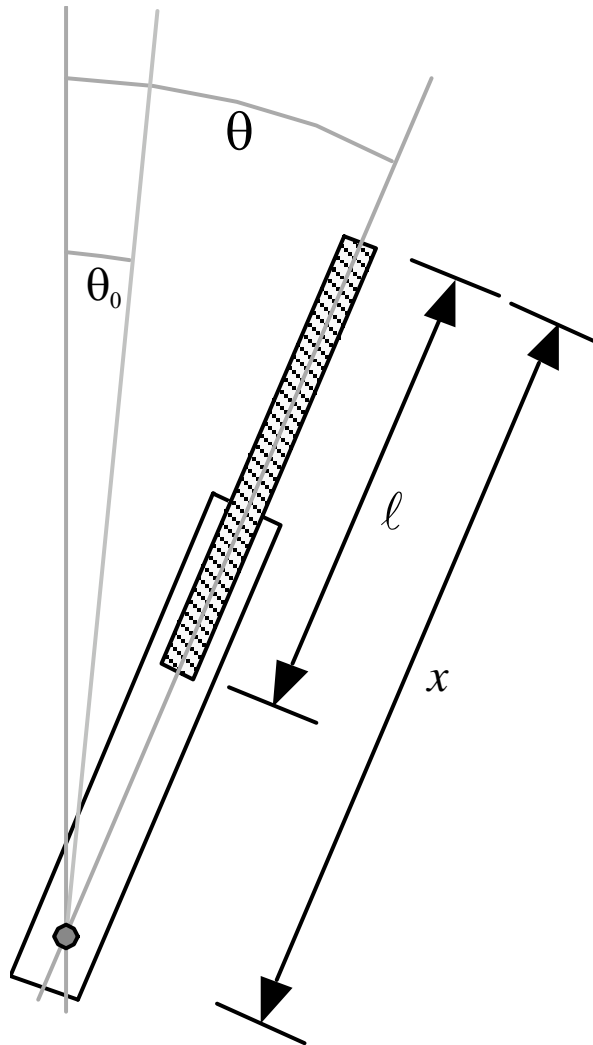


Figura 3: as variáveis θ e x e os parâmetros θ_0 e ℓ .

3. Determinar a expressão do momento de inércia total do pêndulo, I , em função de x e dos parâmetros M_2 , I_1 e ℓ . [0,5 ponto]
4. Escrever a equação do movimento, para a situação em que o eixo de rotação está horizontal, em função do ângulo θ (ver figura 3) e de x , κ , θ_0 , M_1 , M_2 , do momento de inércia total I e de distância $R(x)$ do centro de massa ao eixo de rotação. [1 ponto]
5. Para determinar κ , montar agora o pêndulo colocando-o com o eixo de rotação horizontal

² A pequena porca hexagonal deve ser bem apertada de cada vez que a posição da parte com rosca do pêndulo for alterada. A massa desta porca está incluída em M_1 . Este aperto da porca tem de ser repetido, na parte que se segue, de cada vez que se mudar o comprimento da barra com rosca que constitui a parte 2 do pêndulo.

de acordo com as instruções da primeira página. A barra com rosca deve estar inicialmente enroscada o mais possível dentro do pêndulo. Fixa o pêndulo ao fio de aço apertando o parafuso (com a chave hexagonal) que se encontra na parte de trás do pêndulo, de forma a que a posição de equilíbrio (sob o acção combinada do peso e da força restauradora elástica do fio) se encontre bastante deslocada da vertical. Medir o ângulo de equilíbrio θ_e para vários valores de x (no mínimo 5). [4 pontos]

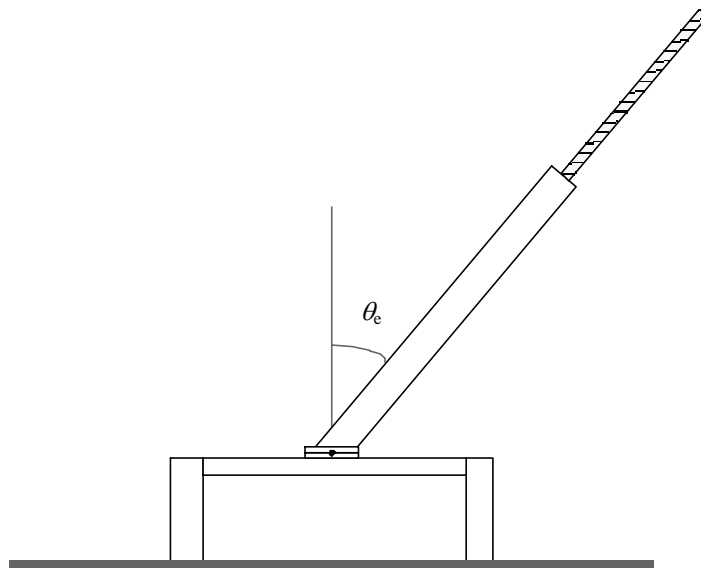


Figura 4: Nesta medição colocar o pêndulo de maneira a que a sua posição de equilíbrio seja claramente fora da vertical.

6. Usando estas últimas medidas, determinar o valor de κ . [4,5 pontos]
7. Colocar agora o pêndulo com o eixo de rotação vertical³ e medir o período de oscilação para vários valores de x (pelo menos 5). A partir destas medidas, determinar I_1 e ℓ . [4 pontos]

Chegado a este ponto, uma vez determinados os parâmetros do sistema, monta agora o pêndulo da seguinte forma:

- eixo de rotação do pêndulo horizontal
- barra com rosca enroscada o mais fundo possível no interior do pêndulo
- pêndulo o mais possível próximo da vertical
- finalmente enrosca a porca hexagonal comprida que tens à tua disposição no extremo livre da barra com rosca. Basta enroscar algumas voltas, a porca não entra mais do que isso.

Nesta posição, o pêndulo pode agora ter duas posições de equilíbrio, dependendo se barra com rosca está mais ou menos enroscada, como se pode ver do gráfico da figura 5, que mostra a energia potencial do pêndulo em função do ângulo θ .

A existência de dois mínimos na energia potencial tal como mostra a figura 5 ilustra um fenómeno conhecido na matemática por *bifurcação*; este fenómeno está presente num conjunto de outros assuntos avançados de física (física das partículas, mecânica estatística, quebra espontânea de simetria).

³ Para estabilizar o pêndulo nesta posição poderá ser necessário ajustar as peças de fixação do fio que estão montadas no quadro-suporte.

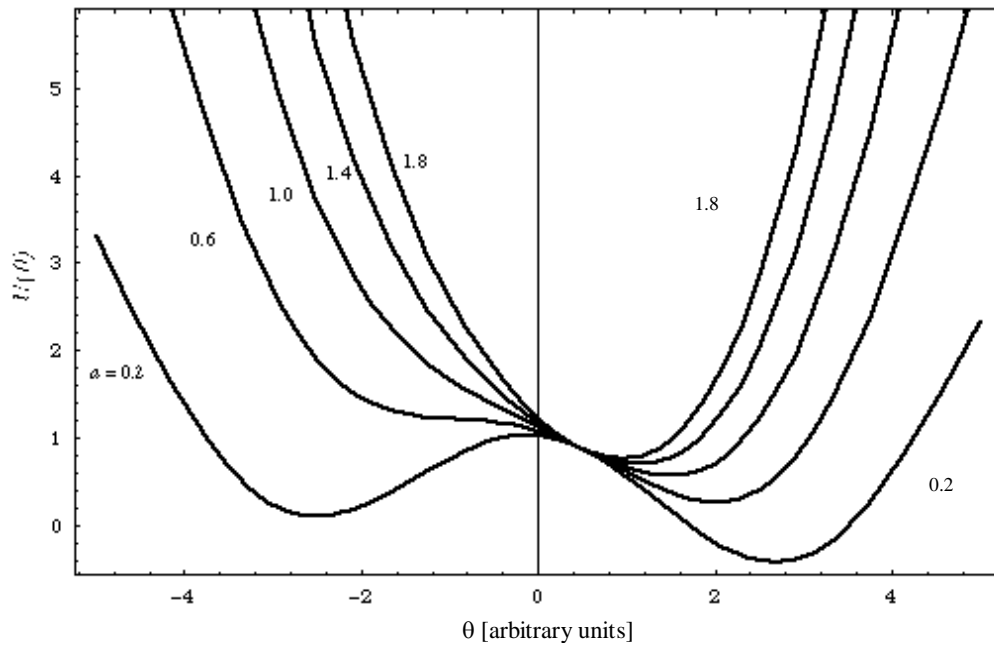


Figura 5: Gráfico da função $U(\theta) = \frac{a}{2}(\theta - \theta_0)^2 + \cos \theta$ (que é proporcional à energia potencial deste problema) em função de θ , com $\theta_0 \neq 0$. As diferentes curvas correspondem a diferentes valores de a indicados na figura; para valores de a pequenos ($a < 1$) aparece a bifurcação. No nosso problema, o parâmetro a está associado com a posição x da barra com rosca.

Podemos agora estudar esta bifurcação medindo o período de pequenas oscilações em torno das posições de equilíbrio:

8. Representa num gráfico o período⁴ T em função de x . Que tipo de função é esta? Será uma função crescente, decrescente ou um tipo mais complexo de função? [2,5 pontos]

⁴ Deve conseguir-se observar duas posições de equilíbrio, mas uma delas é mais estável do que a outra (ver figura 5). Regista e representa graficamente o período das oscilações em torno da posição de equilíbrio mais estável.



NAME _____

TEAM _____

CODE _____

Problem	E
Pag n.	1
Page total	4

Folha de respostas

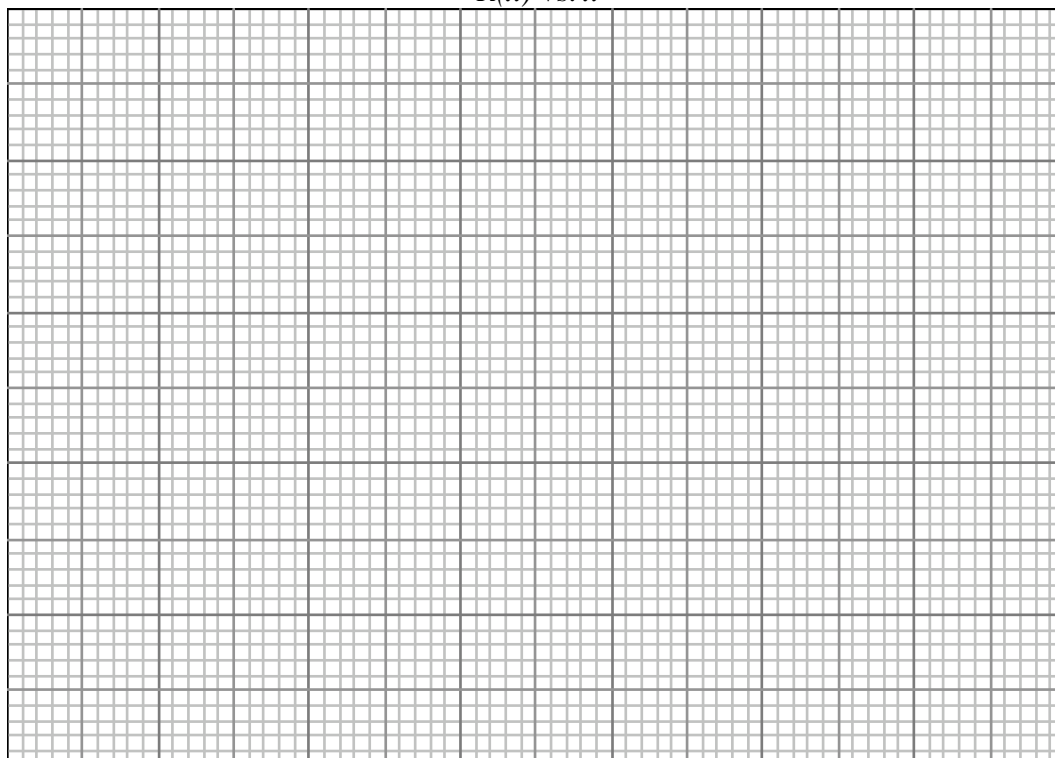
1. Expressão analítica da posição $R(x)$ do centro de massa.....

2. Registrar as medidas de $R(x)$ na tabela seguinte:

x	$R(x)$

Esboçar aqui o gráfico de $R(x)$ em função de x .

$R(x)$ vs. x



x



NAME _____

TEAM _____

CODE _____

Problem	E
Page n.	2
Page total	4

Seja $R(x) = ax+b$; calcular a e b : registar aqui os valores numéricos (incluindo unidades e valores das incertezas experimentais) de $a=.....$ e $b=.....$ obtidos a partir das medidas efectuadas. Registar os valores numéricos de $M_1 =$ e $M_2 =$ que deduziu de a e b .

3. Expressão analítica do momento de inércia total

4. Equação do movimento do pêndulo quando o eixo de rotação está no plano horizontal
.....

5. Completar a tabela seguinte dando, para vários valores de x , os correspondentes valores do ângulo de equilíbrio θ_e . Como não lhe é dado um transferidor, apenas poderá medir comprimentos. Indicar numa folha de papel branco à parte o procedimento e as medidas que efectuou para determinar θ_e .

x	θ_e

6. Registar o valor numérico de κ com a sua incerteza experimental



NAME _____
 TEAM _____
 CODE _____

Problem	E
Page n.	3
Page total	4

7. Registrar na tabela seguinte os valores experimentais do período de oscilação T em função de x , com o eixo de rotação vertical. Caso estes valores sejam a média de várias medidas, inclua também as medidas originais numa folha de papel branco à parte.

x	T

Registrar os valores numéricos, com as correspondentes incertezas, de ℓ e I_1

8. Registrar na tabela seguinte os valores experimentais do período de oscilação T em função de x , quando o eixo de rotação está no plano horizontal. Caso estes valores sejam a média de várias medidas, incluir também as medidas originais numa folha de papel branco à parte.

x	T



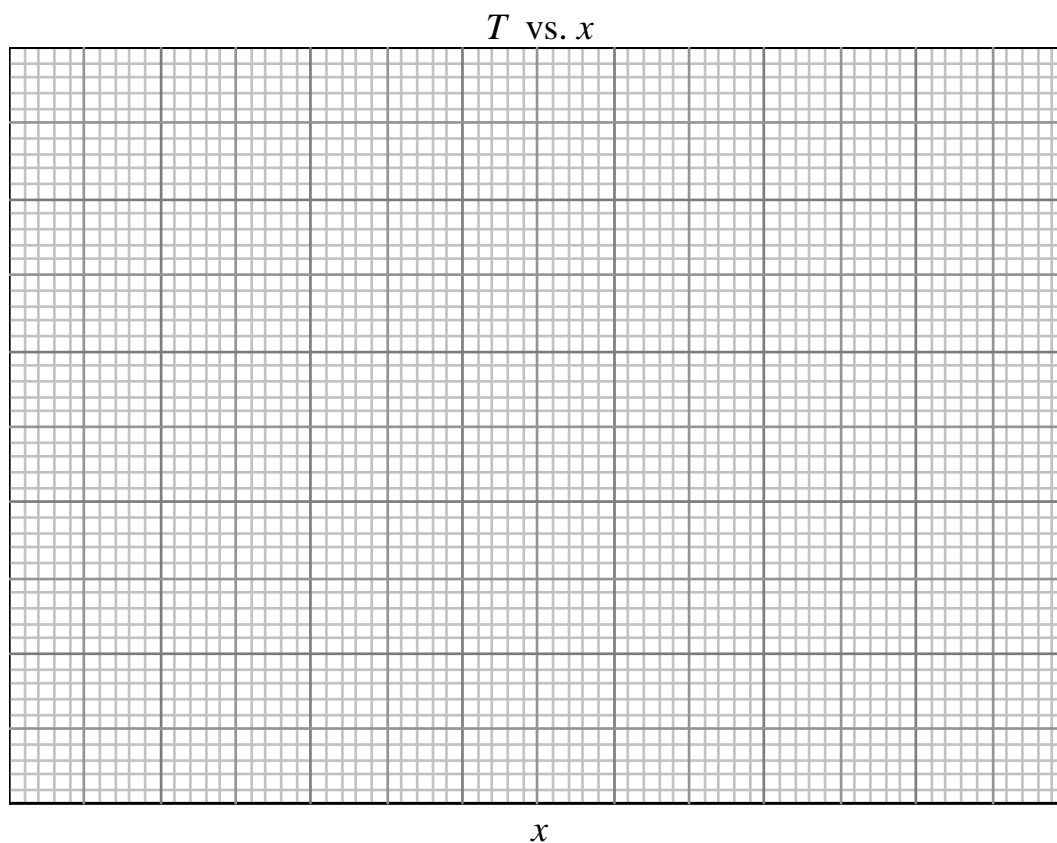
NAME _____

TEAM _____

CODE _____

Problem	E
Page n.	4
Page total	4

Esboçar aqui o gráfico de T em função de x , incluindo as escalas dos eixos.



O período T em função de x

1. é uma função crescente de x
2. é uma função decrescente de x
3. tem um mínimo
4. tem um máximo
5. tem mais de um mínimo
6. tem mais de um máximo
7. só tem um máximo e um mínimo

A resposta correcta é a _____ (seleccione o número da resposta correcta)