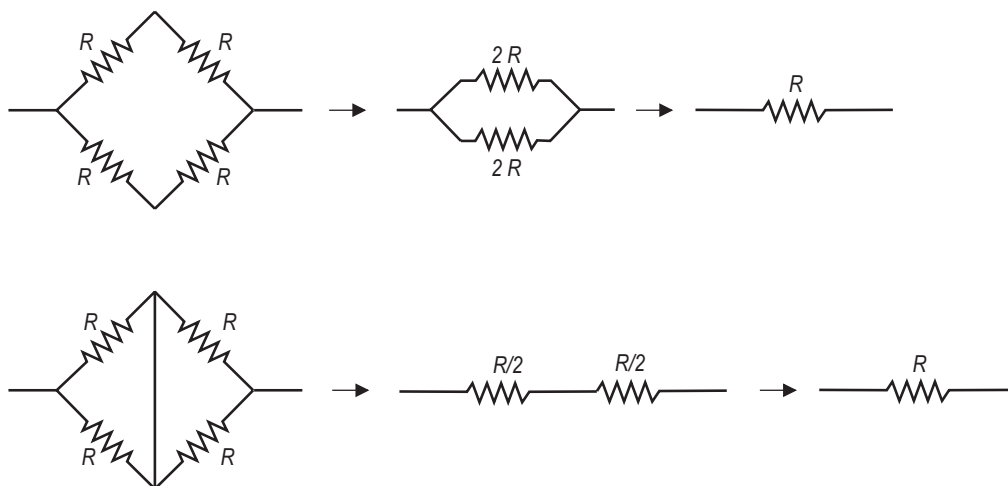
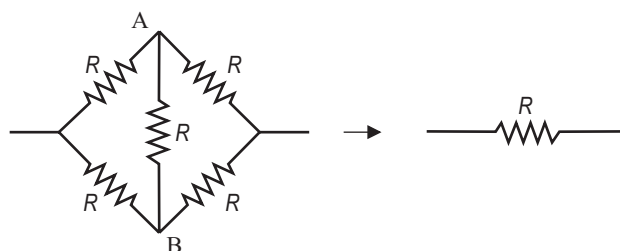


I. Vários tópicos

- a) As primeira e segunda associações de resistências podem ser simplificadas sendo a resistência equivalente, em ambos os casos, igual a R :

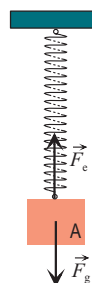


Na terceira situação deve reconhecer-se que na resistência do meio não passa corrente (os pontos A e B estarão sempre ao mesmo potencial) pelo que se cai numa das situações anteriores:



- b) Na situação (i), as forças que se exercem sobre o bloco A são a força gravítica, $F_g = mg$, e a força elástica, $F_e = k(l_1 - l_0)$. Da igualdade destas duas forças, $F_g = F_e$, resulta

$$l_1 = l_0 + \frac{mg}{k}$$



Na situação (ii) há N forças elásticas (todas iguais) que se exercem sobre o bloco B, cuja resultante, de valor $Nk(l_N - l_0)$, iguala a força gravítica de valor mg , donde

$$l_N = l_0 + \frac{mg}{Nk}.$$

- c) A energia adquirida por um electrão sujeito quando está sujeito a uma diferença de potencial de 1 MV é 1 MeV. Como o electrão está inicialmente em repouso, aquela é a energia cinética da partícula, T , depois de atravessar o primeiro dispositivo. A sua energia total é a soma da energia cinética e da energia em repouso,

$$E = m_e c^2 + T = 0,51 + 1 = 1,51 \text{ MeV}.$$

Em cada volta o electrão adquire uma energia de 10 MeV. Após 5 voltas a sua energia total é (está a desprezar-se a energia radiada nas partes curvas do acelerador)

$$E = 0,51 + 50 = 50,51 \text{ MeV}.$$

A velocidade do electrão obtém-se a partir da expressão

$$E = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

substituindo valores,

$$50,51 = \frac{0,51}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \Leftrightarrow v = 0,99995 c.$$

O momento linear, que se obtém a partir de $E^2 = c^2 p^2 + m_e^2 c^4$, é

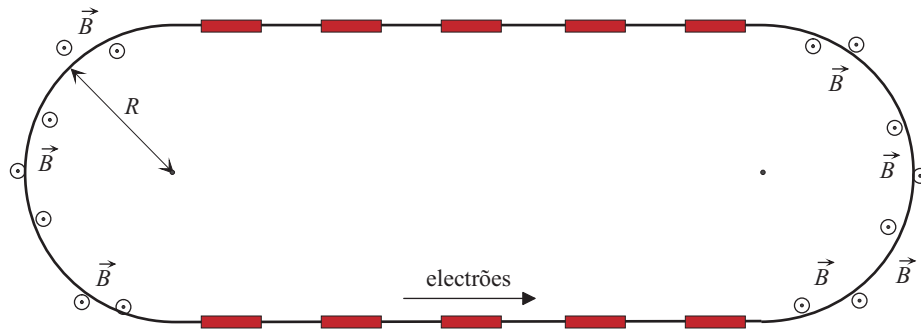
$$p = \sqrt{\left(\frac{E}{c}\right)^2 - m_e^2 c^2} \approx \frac{E}{c} = 50,51 \text{ MeV}/c.$$

A partícula é ultra-relativista.

- d) A força a que uma partícula de carga q e velocidade \vec{v} fica sujeita na presença de um campo de indução magnética \vec{B} é

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B}.$$

Considerando que o movimento dos electrões no acelerador é no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, o campo de indução magnética deve ser perpendicular ao plano do papel e aponta para fora (o electrão tem carga negativa!), como se mostra na figura, tanto num como no outro troço circular do acelerador.



Na verdade, um campo de indução magnética com esta orientação cria uma força centrípeta no electrão de valor $F = |q|vB$ (a velocidade e o campo são perpendiculares). Como, por outro lado, a força centrípeta é dada por $F = m_e v^2 / R$, da igualdade das duas expressões resulta

$$B = \frac{m_e v}{|q| R} .$$

- e) O campo produzido por um plano infinito carregado uniformemente com densidade superficial de carga σ pode ser obtido a partir do Teorema de Gauss. Por simetria o campo é perpendicular ao plano. Tomando para superfície de Gauss uma superfície cilíndrica de área de base S e altura h , o Teorema de Gauss

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

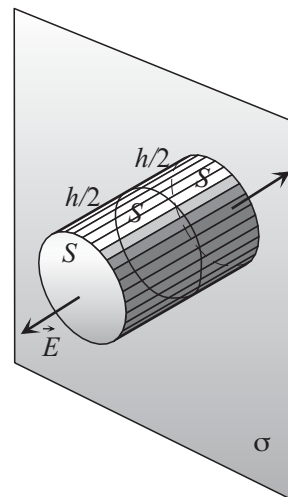
resulta na seguinte expressão (o fluxo do campo eléctrico através da superfície lateral do cilindro é zero)

$$2 E S = \sigma S / \epsilon_0 .$$

donde se conclui que

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} .$$

Veja-se que este campo é independente da distância ao plano.



Cada plano representado na figura do problema cria um campo deste tipo. Assim, o plano horizontal mais acima cria o campo

$$\vec{E} = E \hat{e}_y \quad (\text{acima desse plano})$$

e o campo

$$\vec{E} = -E \hat{e}_y \quad (\text{abaixo desse plano}).$$

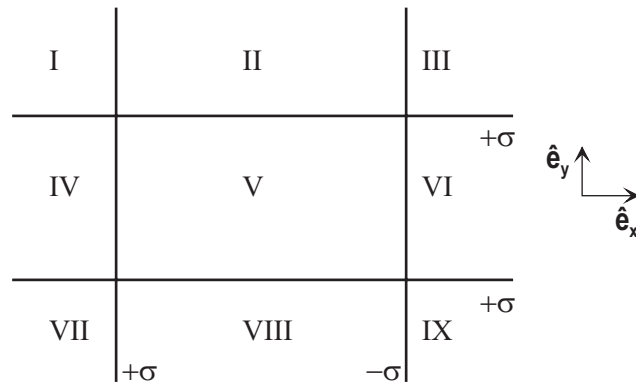
Outro exemplo ainda. O plano carregado com carga negativa cria os campos

$$\vec{E} = E \hat{e}_x \quad (\text{à esquerda desse plano})$$

e o campo

$$\vec{E} = -E \hat{e}_x \quad (\text{à direita desse plano}).$$

Consideremos então as nove regiões do espaço indicadas na figura.



Em cada uma destas regiões têm-se os campos eléctricos:

- Região I: $\vec{E} = 2 E \hat{e}_y$
 Região II: $\vec{E} = 2 E (\hat{e}_y + \hat{e}_x)$
 Região III: $\vec{E} = 2 E \hat{e}_y$
 Região IV: $\vec{E} = 0$
 Região V: $\vec{E} = 2 E \hat{e}_x$
 Região VI: $\vec{E} = 0$
 Região VII: $\vec{E} = -2 E \hat{e}_y$
 Região VIII: $\vec{E} = 2 E (-\hat{e}_y + \hat{e}_x)$
 Região IX: $\vec{E} = -2 E \hat{e}_y$.

II. Mecânica e Termodinâmica

- a) Como no exterior a pressão é nula, a pressão do gás é simplesmente a força que sobre ele exerce o pistão a dividir pela área deste:

$$P_i = \frac{mg}{A}.$$

A equação de estado do gás perfeito,

$$PV = nRT,$$

fica então

$$\frac{mg}{A} Al = nRT_i,$$

donde

$$T_i = \frac{mgl}{nR}.$$

- b) O gás perfeito é um sistema ideal (a energia interna só depende da temperatura), tendo-se $\Delta U = n c_v \Delta T = \frac{3}{2} nR (T_f - T_i)$. Recorda-se que para um gás monoatômico, a capacidade térmica específica molar a volume constante é $c_v = \frac{3}{2} R$.
- c) A variação da energia potencial gravítica é a soma das variações da energia potencial da partícula e do êmbolo (considera-se que a massa do gás é muito pequena). A conservação de energia exige que esta variação seja igual à variação da energia interna do gás:

$$mg(h + l') + mgl' = \frac{3}{2} nR \left(T_f - \frac{mgl}{nR} \right). \quad (1)$$

Na situação de equilíbrio final, a equação de estado permite escrever

$$\frac{2mg}{A} (l - l') A = nRT_f$$

ou ainda

$$2mg(l - l') = nRT_f. \quad (2)$$

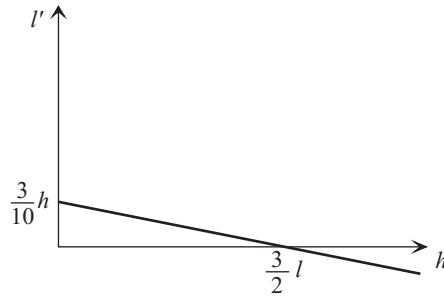
Usando a equação (2) na equação (1), esta passa a escrever-se

$$mg(h + 2l') = 3mg(l - l') - \frac{3}{2} mgl \Leftrightarrow h + 2l' = 3l - 3l' - \frac{3}{2} l$$

e, finalmente,

$$\boxed{l' = \frac{3}{10} l - \frac{1}{5} h}. \quad (3)$$

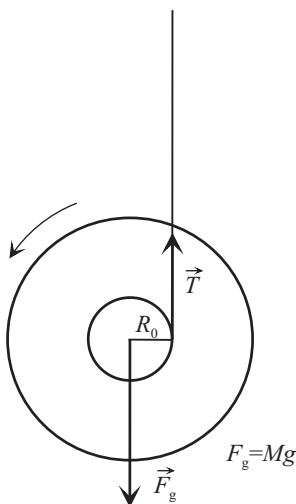
O abaixamento l' do pistão varia linearmente com a altura h . A função $l' = l'(h)$ está representada na figura seguinte:



- d) O abaixamento máximo do pistão, $l' = \frac{3}{10}l$, ocorre quando $h = 0$, ou seja, quando a partícula é colocada simplesmente sobre o pistão. Valores negativos de l' [equação (3)] significa uma subida do pistão relativamente à sua posição inicial. Esta situação acontece quando a partícula cai de uma altura superior a $\frac{3}{2}l$. A conservação da energia, que faz aumentar a temperatura do gás no cilindro, leva, neste caso, à sua expansão.

III. Ioiô

- a) As forças aplicadas são a tensão, \vec{T} , e a força gravítica, \vec{F}_g , representadas na figura:



- b) Relativamente ao centro de massa, quando o ioiô desce roda como se indica na figura, devido ao momento da tensão em relação a esse ponto. A equação fundamental da dinâmica escreve-se

$$T R_0 = I \alpha \quad (\text{para a rotação}) \quad (1)$$

e

$$Mg - T = M a \quad (\text{para a translação}), \quad (2)$$

onde α é a aceleração angular em relação ao centro de massa e a é a aceleração do centro de massa. O acoplamento dos movimentos de rotação e de translação, exprime-se, do ponto de vista matemático, pela equação

$$\alpha = \frac{a}{R_0}.$$

Introduzindo na equação (1) vem

$$T = \frac{I}{R_0^2} a. \quad (3)$$

Substituindo em (2) o valor de T dado por esta expressão, obtém-se

$$Mg = \left(\frac{I}{R_0^2} + M \right) a$$

e, finalmente,

$$a = \left(1 + \frac{I}{MR_0^2} \right)^{-1} g. \quad (4)$$

- c) Das expressões (3) e (4) resulta

$$T = \frac{I / R_0^2}{1 + \frac{I}{MR_0^2}} g$$

- d) Admite-se que o ioiô parte do repouso e vai comparar-se a energia mecânica nesse instante com a energia mecânica depois de o centro de massa ter descido de uma altura h . Considerando que nesta última situação a energia potencial gravítica é nula, a energia mecânica no instante inicial é

$$E_M = M g h. \quad (5)$$

Quando já baixou de uma altura h , a energia mecânica do ioiô é simplesmente a sua energia cinética (de translação e de rotação):

$$E'_M = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

onde ω é a velocidade angular de rotação em torno do centro de massa. Como se tem $\omega = v_{CM} / R_0$, a equação anterior ainda pode ser escrita na seguinte forma:

$$E'_M = \frac{1}{2} v_{CM}^2 \left(M + \frac{I}{R_0^2} \right) \quad (6)$$

Resta então mostrar que E'_M dado por esta expressão coincide com E_M [equação (5)]. A velocidade do centro de massa depois de este ter descido h é dada por (o ioiô parte do repouso e o seu movimento é uniformemente acelerado)

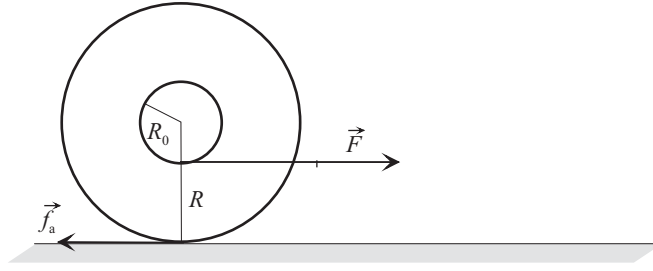
$$v_{CM} = \sqrt{2 a h}$$

e, portanto, fazendo primeiro uso de (4) e inserindo o resultado na equação (6) obtém-se

$$\begin{aligned} E'_M &= \frac{1}{2} 2 \left(1 + \frac{I}{MR_0^2} \right)^{-1} h \left(M + \frac{I}{R_0^2} \right) \\ &= Mgh \end{aligned}$$

que coincide com (5), o que completa a demonstração.

- e) Consideremos, por hipótese, a força de atrito a apontar para a esquerda, como se mostra na figura:



A equação fundamental da dinâmica aplicada ao movimento de translação escreve-se

$$F - f_a = M a \quad (7)$$

O momento da força de atrito (com o sentido arbitrado) tem sentido oposto ao da força \vec{F} . A equação fundamental da dinâmica aplicada ao movimento de rotação em torno do centro de massa escreve-se

$$f_a R - F R_0 = I \alpha = I \frac{a}{R}. \quad (8)$$

De (7)

$$a = \frac{1}{M} (F - f_a)$$

que, introduzida em (8), conduz a

$$f_a \left(1 + \frac{I}{MR^2} \right) = F \left(\frac{I}{MR^2} + \frac{R_0}{R} \right)$$

expressão que ainda se pode escrever na forma

$$f_a = F \frac{MRR_0 + I}{MR^2 + I}.$$

O segundo membro desta expressão é positivo, pelo que o sentido da força de atrito é o indicado na figura em cima e que tinha sido marcado tentativamente (se resultasse uma expressão negativa para a força de atrito, tal significaria que o sentido desta força era o oposto do pressuposto inicialmente). Para que haja rolamento sem escorregamento é necessário que o coeficiente de atrito estático seja superior a

$$\mu_{\text{mín.}} = \frac{f_a}{Mg} = \frac{F}{Mg} \frac{MRR_0 + I}{MR^2 + I}.$$